# Étude explicite de quelques n-champs géométriques

Brahim Benzeghli

**UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences**
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

**THÈSE**

Pour obtenir le titre de
**Docteur en Sciences**
de l'université de Nice Sophia-Antipolis

Spécialité : **MATHÉMATIQUE**

Présentée et soutenue par
**Brahim BENZEGHLI**

# Étude explicite de quelques $n$-champs géométriques

Thèse dirigée par
**Carlos SIMPSON**

**Soutenue le 03/06/2013**

Jury :

| | | |
|---|---|---|
| Abdelkrim ALIOUCHE | McF HDR, Université Larbi Ben M'Hidi, Algérie | Examinateur |
| André HIRSCHOWITZ | PR, Université de Nice-Sophia Antipolis, France | Examinateur |
| Ludmil KATZARKOV | PR, Université de Vienne, Autriche / Miami, USA | Examinateur |
| Carlos SIMPSON | DR, Université de Nice-Sophia Antipolis, France | Directeur |
| Bertrand TOËN | DR, Université de Montpellier 2, France | Raporteur |
| Gabriele VEZZOSI | PR, Université de Paris 7, France | Raporteur |

# Remerciement

Mes premiers remerciements vont à Carlos SIMPSON, mon directeur de thèse, pour m'avoir accueilli. Je lui suis également reconnaissant pour tout le temps qu'il m'a consacré ces dernières années. Ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa disponibilité. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour celà.

Un grand merci à Bertrand TOËN et Gabriele VEZZOSI pour avoir accepté d'être les raporteurs de cette thèse. Leurs commentaires et leurs suggestions m'ont aidé à améliorer ce travail.

Je remercie Abdelkrim ALIOUCHE, André HIRSCHOWITZ et Ludmil KATZARKOV pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je m'adresse à tous mes amis doctorant du laboratoire et autres , avec qui j'ai passé des moments inoubliables.

Je remercie ma famille et en particulier, mes parents, mes frêres et soeurs, pour leurs soutien moral tout au long de cette thèse.

Pour finir, je veux dire à ma femme Yasmina et à ma fille Wissal, merci pour tout, et que je serai de retour bientôt pour assister à l'arrivée du nouveau membre de ma petite famille Haroun.

**Résumé :** Dans [PRID], Pridham a montré que tout $n$-champs d'Artin $\mathcal{M}$ admet une présentation en tant que schéma simplicial $X. \to \mathcal{M}$, telle que le schéma simplicial $X$ satisfait à certaines propriétés notées par $G.P_{n,k}$ de [GROTH]. Dans la présentation $(\cdots \rightrightarrows X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0 \to \mathcal{M})$ . Le schéma $X_1$ représente une carte pour $X_0 \times_{\mathcal{M}} X_0$. Donc, la lissité de $X_0 \to \mathcal{M}$ est équivalent à la lissité des deux projections $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$. Ces sont les deux premières parties de la condition de Grothendieck-Pridham, notées $G.P_{1,0}$ et $G.P_{1,1}$. Dans [BENZ12] nous avons introduite un $n$-champ d'Artin $\mathcal{M}$ des éléments de Maurer-Cartan d'une dg-catégorie. On a construit une carte, et on a déja fait la preuve des premières conditions de lissité explicitement. Pour tout $n$ et tout $0 \leq k \leq n$ Pridham considère un schéma noté $Match_{\Lambda_n^k}(X)$ avec un morphisme $X_n \to Match_{\Lambda_n^k}(X)$. On construira explicitement le schéma simplicial de Grothendieck-Pridham $X$, on montrera la lissité formelle de cette carte précédente , ainsi que $\mathcal{M}$ est un $n$-champ géométrique.

**Mots-clés :** Catégorie simpliciale, dg-catégorie, catégorie enrichie, $n$-catégorie, $\infty$-catégorie, homologie, cohomologie, localisation, complexe , complexe parfait, schéma, $n$-champs, $\infty$-champs, Maurer-Cartan, lissité formelle, schéma de Buchsbaum-Eisenbud, Pullback.

**Abstract :** In [PRID], Pridham has shown that any Artin $n$-stack $\mathcal{M}$ has a presentation as a simplicial scheme $X. \to \mathcal{M}$ such that the simplicial scheme $X$ satisfies certain properties denoted $G.P_{n,k}$ of [GROTH]. In the presentation $(\cdots \rightrightarrows X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0 \to \mathcal{M})$, the scheme $X_1$ represents a chart for $X_0 \times_{\mathcal{M}} X_0$. Thus, the smoothness of $X_0 \to \mathcal{M}$ is equivalent to the smoothness of the two projections $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$. These are the first two parts of the Grothendieck-Pridham condition, denoted $G.P_{1,0}$ and $G.P_{1,1}$. In [BENZ12] we introduced an Artin $n$-stack $\mathcal{M}$ of Maurer-Cartan elements of a dg-category. We constructed a chart, and have already proven the first smoothness conditions explicitly. For any $n$ and any $0 \leq k \leq n$ Pridham considers a scheme denoted $Match_{\Lambda_n^k}(X)$ with a morphism $X_n \to Match_{\Lambda_n^k}(X)$. We will construct explicitly the Grothendieck-Pridham simplicial scheme and show the smoothness of the preceding map, therefore $\mathcal{M}$ is a geometric $n$-stack.

**Keywords :** Simplicial category, dg-category, enriched category, $n$-category, $\infty$-category, homology, cohomology, comlex, perfect complex, scheme, $n$-stacks, $\infty$-stacks, Maurer-Cartan, formally smooth, Buchsbaum-Eisenbud scheme, Pullback.

# Table des matières

# Introduction

Dans [TOVA] Toen et Vaquié ont trouvé un théorème dans le quel ils disent que le $n$-champ $\mathbf{Perf}(X)$ est géométrique pour une variété $X$ propre et lisse. Leur théorème contient en particulier la géométricité de $\mathbf{Perf} = \mathbf{Perf}(Spec(k))$ répondant à la question qui avait été formulée dans [HISI]. Mais ils n'ont pas fourni une carte naturelle pour $\mathbf{Perf}$. Ici $\mathbf{Perf}$ est le $\infty$-champ associé à $\mathbf{Perf}^p$ défini pour tout $B$ par

$$\mathbf{Perf}^p(B) = L(\mathbf{Perf}^{str}(B))$$

tel que $\mathbf{Perf}^{str}$ est le foncteur qui associe pour tout $B$ son image $\mathbf{Perf}^{str}(B)$ la 1-catégorie des complexes strictements parfait, et l'opérateur $L(\mathbf{Perf}^{str})$ est la localisation simpliciale de Dwyer-Kan de $\mathbf{Perf}^{str}$ par les quasi isomorphismes.

Dans [BENZ08], nous avons fourni une carte

$$V \to \mathbf{Perf}$$

naturelle, où $V$ était le schéma de **Buchsbaum-Eisenbud** [BUCH1], [BUCH2], [BRUN], [HUNE], [KEMP], [MASS], [TRIV] et [YOSH] qui paramétrise les différentiels $d$ avec $d^2 = 0$ sur une suite de fibrés vectoriels triviaux.

On rappel ici qu'un complexe de $B$-modules

$$\cdots \to \mathcal{C}^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{C}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{C}^{i+1} \to \cdots$$

est dit strictement parfait si :

- Les compositions $d^i \circ d^{i-1} = 0$ pour tout $i$.
- La longueur du complexe est fini.
- Pour tout $i$, les $\mathcal{C}^i$ sont des $B$-modules libres du rangs finis $r_i$.

On a donné plus de détail dans la section 1.5 sur les complexes parfaits.

Dans [BENZ08], on a construit un $k$-algébre $A$ par des morphismes

$$\begin{array}{rcl} \gamma : K[X_{\cdot,\cdot}^{\cdot}] & \to & A = K[X_{\cdot,\cdot}^{\cdot}]/\mathcal{I} \\ X_{\cdot,\cdot}^{l-1} & \mapsto & \dot{\gamma}(X_{\cdot,\cdot}^{l-1}) \in \mathcal{M}_{r_l, r_{l-1}}(A) \end{array}$$

de sorte que :

$$\gamma(X_{\cdot,\cdot}^{l}).\gamma(X_{\cdot,\cdot}^{l-1}) = 0$$

et pour tout complexe strictement parfait rigidifié $\mathcal{C}$ des $B$-modules définit par

$$\mathcal{C}^i = \begin{cases} 0 & & \text{si } i < 0 \text{ ou } i > n \\ B^{r_i} & B\text{-modules libres de rang } r_i & \text{si } 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

c'est à dire :

$$0 \to \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \dots \to \mathcal{C}^n \to 0,$$

on a montré l'existence d'un unique morphisme d'anneaux $A \xrightarrow{\varphi} B$ (c'est-à -dire $Spec(B) \to V := Spec(A)$) tel qu'il existe un unique isomorphisme de complexes

$$q : \mathcal{C} \cong \mathcal{C}_V \otimes_A B \qquad \text{un isomorphisme}$$

tel que :

$$\forall i = 1..n, \quad q^i : \mathcal{C}^i = B^{r_i} \to \mathcal{C}_V \otimes_A B = A^{r_i} \otimes_A B = B^{r_i}$$

est l'identité. Ça nous a aidé à montrer que $V$ parametrise les $C^i$.

La propriété principale de cette construction était la lissité formelle du morphisme $V \to Perf$, aprés avoir explicité l'$\infty-$champs d'Artin $Perf$. Ainsi on a construit une carte

$$\Phi : V \to \mathbf{Perf}$$

avec $V = Spec(A)$.

On a démontré la lissité artinienne de la carte $V \to \mathbf{Perf}$ d'une manière concrète on posant deux idéaux sur un anneau commutatif $B$, un maximal $m$ et un quelconque $I$ vérifiant $m.I = 0$. On pose

- Un complexe de $B/I$-modules $D^\cdot$ définit pour tout $i$ par

$$\exists r_i \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad D^i = (B/I)^{r_i}.$$

- Un complexe strictement parfait $E^\cdot$ de $B$-modules de longueur $n$ fini.
- Un quasi-isomorphisme

$$\phi : E \otimes_B B/I \to D.$$

et on a montré l'existence de

1. Un complexe de $B$-modules $F^\cdot$ tel que

$$\forall i \exists r_i \in \mathbb{N}; F^i = (B)^{r_i} \qquad \text{et} \qquad F \otimes_B B/I = D.$$

2. Un quasi-isomorphisme

$$\psi : E \to F \qquad \text{tel que} \quad \psi \otimes_B B/I = \phi$$

Ce théorème montre qu'en identifiant les complexes à des cartes de la manière suivante :

$$Spec(B/I) \xrightarrow{D^{\cdot}} V \qquad \text{et} \qquad Spec(B) \xrightarrow{E^{\cdot}} \mathbf{Perf},$$

alors le quasi-isomorphisme $\phi$ fournit une équivalence entre $\Phi D$ et $Spec(B/I)$. Donc on peut étendre $D$ vers $F$ et représenter ça par un morphisme

$$Spec(B) \xrightarrow{F^{\cdot}} V$$

avec en plus l'existence d'une équivalence

$$\Phi E \sim F.$$

On veut généraliser ce résultat pour un autre champs. Ceci correspond à ce qui a été fait dans la prépublication [BENZ12] et fera l'objet des chapitres 4 et 5.

Pour cela on fixera une $dg$-catégorie $k$-linéaire $\mathcal{P}$ qui satisfait aux hypothèses suivants :

- L'ensemble des objets $Ob(\mathcal{P})$ est fini.
- Pour tout $E, F \in Ob(\mathcal{P})$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\quad \mathcal{P}^i(E, F)$ est un $k$-espace vectoriel de dimension fini.
- Il existe un indice $n > 0$ tel que pour tout $i < -n$, le $k$-espace vectoriel $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$.

On peut définir une $(\infty, 1)-$catégorie $MC(\mathcal{P})$ dont les objets sont les couples $(E, \eta)$ où $E$ est un objet de $\mathcal{P}$ et $\eta$ est un élément de Maurer-Cartan dans $\mathcal{P}^1(E, E)$.

On définit l'$\infty$-champs $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ comme le $\infty$-champs associé à l'$\infty$-préchamps $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}{}^{es}$ qui à une $k$-algèbre $B$ associe l'intérieur de $MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$. Cet intérieur peut être vu comme un ensemble simplicial de $Kan$ ou une quasi-catégorie $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}{}^{es}(B)$.

Pour construire une carte recouvrant l'$\infty$-champs $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ on construira un foncteur

$$V_E : AlgCom_k \to \mathcal{E}ns$$

qui associe à chaque $B \in AlgCom_k$ son image $V_E(B)$ l'ensemble des éléments de Maurer-Cartan dans $\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B$. Ce foncteur est représentable par un schéma affine. On procède en choisissant des $k$-bases dans $\mathcal{P}^1$ et $\mathcal{P}^2$ données et en suivant les mêmes démarches que dans [BENZ08] ; $V_E$ est le préimage de l'origine d'une application entre espaces affines

$$\begin{array}{rccc} courb: & \mathcal{P}^1_{sch}(E, E) & \to & \mathcal{P}^2_{sch}(E, E) \\ & \eta & \mapsto & d(\eta) + \eta\eta. \end{array}$$

La détermination du $V_E$ nous permettra d'avoir une carte

$$V_E \to \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}.$$

On démontre qu'elle est formellement lisse. Pour ça on montre que pour un anneau commutatif $B$ et si $I$ un idéal de carré nul dans $B$, alors : pour tout couple de morphismes

$$(F, \zeta_I) \quad : \quad \underset{a_I}{\overset{\alpha_I}{\rightleftarrows}} \quad : \quad (E, \eta_I := \eta \otimes_B B/I)$$

tels que $a_I$ et $\alpha_I$ sont inverses dans $H^0(\mathcal{MC}(\mathcal{P} \otimes_k B/I))$, alors il existe un relèvement $\zeta$ pour $\zeta_I$ et $\alpha$ pour $\alpha_I$ tel que $d(\zeta) + \zeta^2 = 0$ et $d_{\zeta\eta}(\alpha) = 0$.

L'existence d'une carte permet de déduire que $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est un $(n+1)$-champs d'Artin.

Cependant, la structure supérieure n'est pas explicite dans la carte. Au chapitre 6, qui correspond à la prépublication [BENZ13], nous allons étendre la carte en un schéma simplicial qui correspond à la structure supérieure.

Dans [PRID], Pridham a montré que tout $n$-champs d'Artin $\mathcal{M}$ admet une présentation en tant que schéma simplicial

$$X. \to \mathcal{M}$$

telle que le schéma simplicial $X.$ satisfait à certaines propriétés de lissité qui seront rappelées ci-dessous. Ces propriétés ont été énoncés pour la première fois par Grothendieck dans [GROTH] donc nous appellons cela la *condition de Grothendieck-Pridham* notée $G.P.$

Considérons le début de la présentation

$$X_1 \rightrightarrows X_0 \to \mathcal{M}.$$

Le premier élément $X_0$ du schéma simplicial est la carte pour $\mathcal{M}$. Ensuite, le schéma $X_1$ devra jouer le rôle de carte pour $X_0 \times_{\mathcal{M}} X_0$. Donc, la lissité de $X_0 \to \mathcal{M}$ est équivalent à la lissité des deux projections $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$. Ces sont les deux premières parties de la condition de Grothendieck-Pridham, notées $G.P_{1,0}$ et $G.P_{1,1}$. Dans le cadre de notre construction, ces conditions correspondent à la lissité prouvé en chapitre 5.

Pour la suite, pour tout $n$ et tout $0 \leq k \leq n$ Pridham considère un schéma noté $Match_{\Lambda_n^k}(X)$ avec un morphisme

$$X_n \to Match_{\Lambda_n^k}(X).$$

La condition $G.P_{n,k}$ est que ce morphisme est lisse et surjectif. Ceci est un analogue géométrique à la condition de Kan classique mentionné dans [ZHU] où elle appelle une variété différentielle simpliciale qui satisfait la condition $G.P_{n,k}$, une variété différentielle de Kan. [ZHU] fait référence à [HENR] qui lui aussi fait référence á [SEYM] ou la même définition apparait, ainsi que pour la condition de trivialité en degré $> n$ dans [DUSK]. Une forte similarité avec la condition pour un hyper-recouverement dans la topologie lisse de Verdier se trouve dans [HENR], [GLEN] et [AGV].

Si $X_n$ sont des schémas de type fini sur $k$, il suffit de prouver que le morphisme est formellement lisse et surjectif sur les points à valeurs dans un corps algébriquement clôs.

Notre but est de construire un schéma simplicial de Grothendieck-Pridham pour le $(n+1)$-champ des éléments de Maurer-Cartan $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ considéré en 4.2 et 5.3. On obtiendra ainsi une construction directe d'un $(n+1)$-champ géométrique. Notre schéma simplicial sera très naturel, alors que si on applique la construction de Pridham on obtiendrait une présentation très compliquée.

Dans notre cas, on voudra commencer donc par $X_0 := V_E$, la carte construite en 4.2. Ce schéma paramétrise les éléments de Maurer-Cartan pour la dg-catégorie $\mathcal{P}$ fixée au départ. Ensuite, $X_1$ sera le schéma des paramètres pour les triplets $\{(E,\eta),(F,\zeta),\alpha)\}$ où $(E,\eta)$ et $(F,\zeta)$ sont des MC-objets et $\alpha$ une quasi-équivalence entre les deux. Plus généralement, $X_n$ devrait correspondre au nerf consistant des suites de $n$ quasi-équivalences entre MC-objets.

Pour obtenir la lissité requise par la condition $G.P$, on utilisera le *nerf cohérent*. Afin de définir ceci, nous commençons dans la première partie du papier, par une exposition de la notion de *foncteur faible* entre dg-catégories. La notion de foncteur faible fait également rentrer la notion d'élément de Maurer-Cartan, restant dans le même style. Cette construction est sans doute bien connue aux experts des dg et $A_\infty$-catégories, mais il semblerait utile d'avoir une description explicite.

On démontre ainsi le théorème suivant ( Corollaire 6.2.2) : le schéma simplicial défini par $X(B) = NC^*(MC(\mathcal{P}\otimes_k B)$ satisfait aux conditions de Grothendieck-Pridham $G.P_{n,k}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq k \leq n$.

# Chapitre 1

# Définitions des Structures Algébriques

## 1.1 Les Catégories

**Définition 1.1.1 (Catégorie)** *Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une classe $ob(\mathcal{C})$ dont les éléments sont des objets et pour tout $A, B \in ob(\mathcal{C})$, d'un ensemble $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(A, B)$ dont les éléments sont des morphismes ou flèches*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f : A \to B; \quad A, B \in \mathcal{C}\}$$

*muni d'une loi unitaire et associative.*

**Définition 1.1.2 (Catégorie opposée)** *On appel catégorie opposée ou dual de $\mathcal{C}$ et on note par $\mathcal{C}^\circ$, la catégorie qui a comme objets les mêmes objets de $\mathcal{C}$ mais avec des flèches inversées. Et on a :*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}^\circ}(A, B) = \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(B, A).$$

**Remarque 1.1.3** On remarque que :
- $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$ .
- Si $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(A, B)$ et $g \in \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(B, C)$ alors $f^\circ \circ g^\circ = (g \circ f)^\circ$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}^\circ}(A, C)$.
- On dit que $f : A \to B$ est un monomorphisme si $\forall E \in ob(\mathcal{C})$ et $\forall g, h \in \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(E, A)$ avec $f \circ g = f \circ h$ alors $g = h$.

**Notation 1.1.4** Soit

$$\mathcal{F}l(\mathcal{C}) := \mathcal{H}om_{\mathcal{C}} = \{\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(A, B); \quad A, B \in ob(\mathcal{C})\},$$

on note par $s(f)$ la source de $f$ et par $b(f)$ le but de $f$ pour tout $f \in Fl(\mathcal{C})$.

**Définition 1.1.5 (Produit fibré " Pullback")** *Soient $f, g \in \mathcal{F}l(\mathcal{C})$ tel que $b(f) = b(g) = Z$, le produit fibré de $f$ et de $g$ est la donnée d'un objet $P \in ob(\mathcal{C})$ et d'un couple*

$$(p_f, p_g) \in \mathcal{H}om(P, s(f)) \times \mathcal{H}om(P, s(g))$$

*qui est un objet final dans la catégorie des couples $(p_f, p_g)$ tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_g"] \arrow[d, "p_f"'] & s(g) \arrow[d, "g"] \\
s(f) \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Autrement dit $f \circ p_f = g \circ p_g$.

On note le produit fibré par le triplet $(P, p_f, p_g)$. Ce produit est unique a isomorpphisme prêt, c'est a dire que s'il existe un autre produit fibré $(Q, q_f, q_g)$ de $f$ et $g$ alors il existe un unique morphisme $u : Q \to P$ tel que $p_f \circ u = q_f$ et $p_g \circ u = q_g$ Comme le montre la commutativitée du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "q_g"] \arrow[ddr, bend right, "q_f"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_g"] \arrow[d, "p_f"'] & s(g) \arrow[d, "g"] \\
& s(f) \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

## 1.2 Les Foncteurs et les Préfaisceaux

**Définition 1.2.1 (Foncteur)** *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, un foncteur covariant $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est une règle qui à chaque objet $A$ dans $\mathcal{C}$ associe un objet $\mathcal{F}(A)$ dans $\mathcal{D}$ et à chaque morphisme*

$$f : A \to B$$

*associe un morphisme*

$$\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$$

*tels que $\forall A \in \mathcal{C}$, on a $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ et $\forall A, B, C \in \mathcal{C}$, si $f \in \mathcal{H}om(A, B), g \in \mathcal{H}om(B, C)$ alors*

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

*Un foncteur contravariant peut être vu comme un foncteur covariant de $\mathcal{C}^\circ$ dans $\mathcal{D}$.*

**Définition 1.2.2 (Transformation naturelle)** *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux foncteurs entre les deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ($\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$). Une transformation naturelle $\eta$ entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est la donnée pour tout $X \in ob(\mathcal{C})$ d'un morphisme*

$$\eta_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \text{ dans } \mathcal{D}$$

*telle que pour tout $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X, Y)$, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
\mathcal{G}(X) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

Soit la catégories des ensembles $\mathcal{E}ns$ dont les flèches sont les morphismes entres les ensembles et soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque et $X$ un objet de $\mathcal{C}$. On note par $Hom_{\mathcal{C}}(X, .) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ le foncteur covariant qui envoi un objet $Y$ de $\mathcal{C}$ sur l'ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ; si $f : Y \to Z$ est une flèche de $\mathcal{C}$ il l'envoie sur l'application $p \mapsto f \circ p$ de $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ vers $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$. On note par $Hom_{\mathcal{C}}(., X) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ le foncteur contravariant qui envoi un objet $Y$ de $\mathcal{C}$ sur l'ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ ; si $f : Y \to Z$ est une flèche de $\mathcal{C}$ il l'envoie sur l'application $p \mapsto p \circ f$ de $Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$ vers $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

**Définition 1.2.3 (foncteur représentable)** *On dit qu'un foncteur covariant $F : \mathcal{F} \to$ $Ens$ est représentable s'il existe un objet $X$ de $\mathcal{C}$ tel que $F$ soit isomorphe à $Hom_{\mathcal{C}}(X, .)$. D'une manière analogue, on dit qu'un foncteur contravariant $F : \mathcal{F} \to \mathcal{E}ns$ est représentable s'il existe un objet $X$ de $\mathcal{C}$ tel que $F$ soit isomorphe à $Hom_{\mathcal{C}}(., X)$.*

**Définition 1.2.4** *On définit la catégorie $\mathcal{F}onct(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et les flèches sont les transformations naturelles entres les foncteurs (les objets). C'est-à-dire que*

$$ob(\mathcal{F}onct(\mathcal{C}, \mathcal{D})) = \{les\ foncteurs\ \mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}\}$$

*et*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{F}onct(\mathcal{C},\mathcal{D})}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G} \quad \forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{F}onct(\mathcal{C}, \mathcal{D})\}.$$

Dans la suite on va travailler avec des foncteurs contravariants qu'on peut les voir comme des foncteurs covariants de $\mathcal{C}^\circ$ vers $\mathcal{D}$. Pour celà, supposons la catégorie $\mathcal{E}ns$, et la catégorie $\mathcal{C}^\circ$ l'opposée de $\mathcal{C}$ et on définit la catégorie $\mathcal{F}onct(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{E}ns)$.

**Remarque 1.2.5** *La catégorie $\mathcal{F}onct(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{E}ns)$ est exactement la catégorie des préfaisceaux d'ensemble sur $\mathcal{C}$, car un préfaisceau peut être définit comme un foncteur contravariant d'une catégorie quelconque dans la catégorie des ensembles.*

**Définition 1.2.6** *Soit $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre les deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Pour tout objets $c_1, c_2 \in ob(\mathcal{C})$ on définit l'application :*

$$\mathcal{F}_{(c_1,c_2)} : \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(c_1, c_2) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(c_1), \mathcal{F}(c_2))$$

*qui associe pour tout morphisme $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ son image $\mathcal{F}(f)$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(c_1), \mathcal{F}(c_2))$. On dit que le foncteur $\mathcal{F}$ est :*

- *Fidèle si $\mathcal{F}_{(c_1,c_2)}$ est injectif;*
- *Plein si $\mathcal{F}_{(c_1,c_2)}$ est surjectif;*
- *Pleinement fidèle si $\mathcal{F}_{(c_1,c_2)}$ est bijectif.*

**Proposition 1.2.7** *On dit qu'un foncteur*

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

*entre deux catégories est pleinement fidèle si et seulement si pour tout $X, Y \in ob(\mathcal{C})$, il existe un isomorphisme*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

*entre $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$.*

**Théorème 1.2.8 (Lemme de Yoneda)** *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, le foncteur*

$$\mathcal{C} \to \mathcal{F}onct(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$$

*est pleinement fidèle.*

**Définition 1.2.9** *Le spectre d'un anneau commutatif unitaire $A$ est l'ensemble de tous ses idéaux premiers. On le note par $Spec(A)$.*

Rappelons ici qu'un idéal $I$ d'un anneau $A$ est dit premier si

$$\forall x, y \in A; \quad \text{si } xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

**Définition 1.2.10 (Homéomorphismes)** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. L'application*

$$f : X \to Y$$

*est un homéomorphisme si et seulement si $f$ est bijective, continue et son inverse aussi est continue. Deux tels espaces topologiques sont dits homéomorphes.*

On peut voir un homéomorphisme $f : X \to Y$ comme un isomorphisme entre deux espaces topologiques.

**Définition 1.2.11 (Variété Topologique)** *Une variété topologique est un espace topologique $X$ qui possède un recouverement d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ homéomorphes avec des ouverts de $\mathbb{R}^{n_i}$ (ie : $\forall i \in I$, il existe un homéomorphisme*

$$\varphi_i : U_i \to V_{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}$$

*avec $V_{n_i}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n_i}$ ) pour un certain entier $n_i > 0$ dépendant de $i$ .*

**Définition 1.2.12 (Préfaisceaux)** *Soit $X$ un espace topologique quelconque, un préfaisceau d'ensemble $\mathcal{F}$ sur $X$ est la donnée de :*

- *Pour tout ouvert $U$ de $X$ , un ensemble $\mathcal{F}(U)$ et $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.*
- *pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$, une application*

  $$\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

  *appelée application de restrection de $U$ sur $V$, données telles que pour toutes inclusions d'ouverts $W \subset V \subset U$ on a :*

  $$\rho_{WU} = \rho_{WV}\rho_{VU} \qquad et \qquad \rho_{UU} = Id_U$$

**Remarque 1.2.13**

- Un élément de $\mathcal{F}(U)$ est appelé une section de $\mathcal{F}$ sur $E^{\cdot}$.
- Les éléments de $\mathcal{F}(X)$ sont appelés les sections globales de $\mathcal{F}$.
- L'application $\mathcal{F} : U \to \mathcal{F}(U)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts de $X$ dans la catégorie des ensembles.
- Lorsque les ensembles $\mathcal{F}(U)$ sont des groupes (resp. des algèbres, des espaces vectoriels, ...) et que les applications de restriction sont des morphismes de groupes (resp. des morphismes d'algèbres, des applications linéaires, ...), on parle de préfaisceau de groupes (resp. d'algèbre, d'espace vectoriel, ...).
- Par fois on note par $\Gamma(U, \mathcal{F})$ au lieu de $\mathcal{F}(U)$.

**Définition 1.2.14 (Faisceaux)** *Un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur $X$ est appelé faisceau si pour tout ouverts $V$ de $X$, réunion d'une famille d'ouverts $(V_i)_{i\in I}$ de $X$, et pour toute famille $(s_i)_{i\in I}$ de sections de $\mathcal{F}$ sur les ouverts $V_i$ vérifiant :*

$$s_{i|_{V_i\cap V_j}} = s_{j|_{V_i\cap V_j}},$$

*il existe une unique section $s$ de $\mathcal{F}$ sur $V$ telle que*

$$s_{|_{V_i}} = s_i$$

On note ici que les préfaisceaux et les faisceaux peuvent être considérer comme des objets d'une catégorie, dont les flèches sont les morphismes entre préfaisceaux ou faisceaux, vu que les morphismes entre faisceaux sont les mêmes qu'entre préfaisceaux. Ces morphismes vont être définit de la manière suivante

**Définition 1.2.15** *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux préfaisceaux définit sur un même espace topologique $X$. Un morphisme de préfaisceaux*

$$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

*est la donnée d'une famille de morphismes*

$$f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

*pour ouvert $U$ de l'espace topologique $X$, tels que pour toute section $s \in \mathcal{F}(U)$, on a :*

$$f(V)(s|_V) = f(U)(s)|_V.$$

## 1.3 Les Ensembles Simpliciaux

On note par $\Delta$ la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés $[n] = \{0, 1, ..., n\}$; $\forall n \in \mathbb{N}$. Les flèches de $\Delta$ sont des applications $\delta : [n] \to [m]$ telles que $0 \leq \delta(i) \leq \delta(j) \leq m$ pour $0 \leq i \leq j \leq n$. Les flèches $\delta$ s'ecrivent d'une façon unique comme compositions (produit) des applications $p_i$ et $q_j$ définies par :

$$\begin{array}{cccc} p_i : & [m-1] & \to & [m] \\ & j < i & \mapsto & j \\ & j \geqslant i & \mapsto & j+1 \end{array} \quad ; \qquad \begin{array}{cccc} q_j : & [m+1] & \to & [m] \\ & i \leqslant j & \mapsto & i \\ & i > j & \mapsto & i-1 \end{array}$$

de sorte que $\delta = p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_s}q_{j_1}.q_{j_2}...q_{j_t}$, où $i_1, i_2, ..., i_s$ dans l'ordre décroissant sont les éléments de $[m]$ qui ne sont pas atteints par $\delta$, et $j_1, j_2, ..., j_t$ dans l'ordre croissant les éléments de $[n]$ tels que $\delta(j) = \delta(j+1)$, et $n - t = m - s$.

**Définition 1.3.1** *On définit et on note par $\Delta^n$ la catégorie n-produits de $\Delta$, ses objets sont les n-uplets $([m_1], ..., [m_n])$, qu'on notera dans la suite par $M = (m_1, ..., m_n)$.*

Une flèche $\alpha : M \to M'$ est de la forme $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ où $\alpha_i \in Mor_\Delta(m_i, m'_i)$. Comme pour les flèches de $\Delta$, les flèches de $\Delta^n$ sont engendrées par des flèches élémentaires $p_i^k$, $q_i^k$ définient pour tout $M = (m_1, ..., m_n) \in Ob(\Delta^n)$

$$p_i^k = I_{[m_1]} \times ... \times p_i \times ... \times I_{[m_n]}$$

et

$$q_i^k = I_{[m_1]} \times ... \times q_i \times ... \times I_{[m_n]}$$

pour $1 \leqslant k \leqslant n$ , $0 \leqslant i \leqslant m_k$ et $p_i$, $q_i$ sont les $k^{eme}$ coordonnées.

**Définition 1.3.2** *On note par $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. Un n-pré-nerf est un foncteur contravariant $\varphi$ de la catégorie $\Delta^n$ vers celle des ensembles $\mathcal{E}ns$. Un tel focteur est déterminé par les images des applications $p_i^k$ et $q_i^k$. Les morphismes entre les n-pré-nerfs sont les transformations naturelles entres eux en temps que foncteurs.*

### 1.3.1 Petite catégorie

Soit $\mathcal{U}$ un univers, en particulier un ensemble des ensembles. Un ensemble $S$ est $\mathcal{U}$-petit s'il existe un élément $U \in \mathcal{U}$ et un isomorphisme $S \to U$. Une catégorie $\mathcal{C}$ est $\mathcal{U}$-petite (ou petite tout court) si l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un élément de $\mathcal{U}$.

### 1.3.2 Les simplexes

Un simplexe ou $n$-simplexe est l'objet géométrique fermé le plus simple à dimension $n$. Par exemple en dimension 1 ( une droite) les 1-simplexes sont des segments, en 2-dimension ( un plan) les 2-simplexes sont des triangles , en 3-dimension ( un espace) les 3-simplexes sont des tétraèdes, ... et un 0-simplexe est un point.

Plus présisemment, un $n$-simplexe est l'envlope convexe d'un ensemble de $n+1$ points utilisés pour formé un repère affine dans un espace euclidien.

## 1.4 Algèbre homologique

**Définition 1.4.1** *Soit $A$ un anneau. Un complexe $C^{\cdot}$ de $A$-modules est une suite*

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

*des $A$-modules $C^i$ indexés par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ avec des morphismes (différentielles) vérifiant : $d^{i+1}d^i = 0$.*

**Définition 1.4.2** *Soient $(C^{\cdot}, d)$, $(E^{\cdot}, d')$ deux complexes. Un morphisme de complexes $f : C^{\cdot} \to E^{\cdot}$ est la donnée, pour tout $i$, d'un morphisme $f^i : C^i \to E^i$ tels que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
C^i \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "f^i"'] & C^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\
E^i \arrow[r, "d'^{i+1}"'] & E^{i+1}
\end{tikzcd}$$

*On dit que la suite*

$$0 \to C^{\cdot} \xrightarrow{f} E^{\cdot} \xrightarrow{g} F^{\cdot} \to 0$$

*est une suite exacte si et seulement si pout tout $i$, les suites*

$$0 \to C^i \xrightarrow{f^i} E^i \xrightarrow{g^i} F^i \to 0$$

*sont exactes.*

**Proposition 1.4.3** *Si $f : C^{\cdot} \to E^{\cdot}$ est un morphisme de complexes alors $\forall i$ :*

- $f^i(Ker(d^{i+1})) \subset Ker(d'^{i+1})$.
- $f^{i+1}(Im(d^{i+1})) \subset Im(d'^{i+1})$.

*Ces deux résultats nous confirment l'existence des morphismes*

$$H^i(f) := \overline{f^i} : H^i(C^{\cdot}) \to H^(E^{\cdot})$$

*et* $H^i(C^{\cdot}) = Ker(d^{i+1})/Im(d^i), \quad \forall i.$

### 1.4.1 Suite de Cohomologie

Soit $(C, d)$ le complexe

$$... \to \mathcal{C}^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{C}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{C}^{i+1} \to ...$$

et on note par

$$Z^i = Z^i(C) = Ker(d^i)$$

le module des $i$-cycles, et par

$$B^i = B^i(C) = Im(d^{i-1})$$

le module des $i$-bords. On a définit (voir définition2.1.2) le $i^{eme}$ groupe d'homologie du complexe par

$$H^i(C) = Z^i/B^i = Ker(d^i)/Im(d^{i-1})$$

**Définition 1.4.4** *On appelle homologie de $C$ et on le note par $H(C)$ le module gradué associé à la famille $(H^i)_i$.*

Si $H(C)$ est le module gradué de l'homologie, défini ci-dessus, on pose

$$H(f) : H(C') \to H(C)$$

**Définition 1.4.5** *L'application $H(f)$ est appelée l'application induite par $f$ sur l'homologie.*

*Si pour tout $i$, $H^i(f)$ est un isomorphisme, on dit que $f$ est un quasi-isomorphisme ou un homologisme.*

**Proposition 1.4.6** *Si $f : C' \to C$ et $g : C \to C''$ sont des morphismes de complexes, alors*

$$H(g) \circ H(f) = H(g \circ f) \quad \text{et} \quad H(Id) = Id$$

*ainsi $H$ est un foncteur de la catégorie des complexes dans celle des modules gradués.*

**Lemme 1.4.7** *Soient $(C^{\cdot}, d), (D^{\cdot}, d')$ deux complexes, et $f, g : C^{\cdot} \to D^{\cdot}$ deux morphismes de complexes. Si $f$ et $g$ sont homotopes, alors $H(f) = H(g)$.*

**Preuve :**

En effet ; $f_n - g_n$ s'annulle sur les cycles , qui forment le noyau de $d$, $(Ker(d^i))$, et par la définition de l'homotopie, l'image de $f_n - g_n$ est contenue dans les bords (l'image de $d'^{-1}$). Voir [LANG].

Soit $K$ un corps et soit $(C, d)$ le complexe

$$... \to \mathcal{C}^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{C}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{C}^{i+1} \to ...$$

tels que $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}^i$ est un $K$-espace vectoriel et $d^i$ est une application linéaire entre espaces vectoriels.
On gardant les mêmes notations pour

$$\begin{array}{lll} Z^i = & Ker(d^i), & \forall i \in \mathbb{Z} \\ B^i = & Im(d^{i-1}), & \forall i \in \mathbb{Z} \\ H^i = & Z^i/B^i, & \forall i \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Le théorème de décomposition en isomorphisme [CALA], [LANG] nous montre la commutativitée du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "p_{i+1}"'] & \mathcal{C}^{i+1} \\ \mathcal{C}^i/Z^i \arrow[r, "\gamma"] & B^{i+1} \arrow[u, "j_{i+1}"'] \end{tikzcd}$$

tel que $\gamma$ est un isomorphisme entre $\mathcal{C}^i/Z^i$ et $B^{i+1}$ , $j_{i+1}$ est l'inclusion canonique de $B^{i+1}$ dans $\mathcal{C}^{i+1}$, donc elle est injective et $p_{i+1}$ la projection canonique de $\mathcal{C}^i$ dans $\mathcal{C}^i/Z^i$. De plus l'application $\mathcal{C}^i \to B^{i+1}$ est surjective aussi, ce qui nous permettera à dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^{i-1} & & \xrightarrow{d^{i-1}} & & \mathcal{C}^i & \xrightarrow{d^i} & \mathcal{C}^{i+1} \\ & \pi_i \searrow & & j_i \nearrow & \downarrow \pi'_{i+1} & & \uparrow j_{i+1} \\ & & B^i & & \mathcal{C}^i/Z^i & \xrightarrow{d'^i} & B^{i+1} \end{array} \qquad (1.1)$$

est commutatif.
Par définition des $B^i$ , $Z^i$ et le fait que $d^i \circ d^{i-1} = 0$ on a les deux inclusions :

$$B^i \subset Z^i \subset \mathcal{C}^i \quad \forall i$$

la première inclusion nous donne l'injection canonique entre le sous-espace vectoriel $B^i$ et l'espace vectoriel $Z^i$, donc une suite exacte courte

$$B^i \to Z^i \to Z^i/B^i \qquad (Z^i/B^i = H^i) \qquad (1.2)$$

Choisissons une $K$-base $\{\omega_1^i, ...\omega_{t_i}^i\}$ de $H^i$ et $\epsilon_1^i, ..., \epsilon_{t_i}^i \in Z^i$ de sorte que l'application $\alpha$ soit définit par

$$\begin{array}{rcl} \alpha : Z^i & \to & H^i \\ \epsilon_j^i & \mapsto & \alpha(\epsilon_j^i) = \omega_j^i \end{array}$$

Les vecteurs $\epsilon_1^i, ..., \epsilon_{t_i}^i$ sont linéairement indépendants.

En effet ; si on a

$$\forall a_1, ..., a_{t_i} \in K : \quad \sum_{j=1}^{t_i} a_j \epsilon_j^i = 0$$

alors ( comme $\alpha$ est un morphisme, donc $\alpha(0) = 0$

$$\begin{array}{rcl} \alpha(\sum_{j=1}^{t_i} a_j \epsilon_j^i) & = & \sum_{j=1}^{t_i} \alpha(a_j \epsilon_j^i) \\ & = & \sum_{j=1}^{t_i} a_j \alpha(\epsilon_j^i) \\ & = & \sum_{j=1}^{t_i} a_j \omega_j^i = 0 \end{array}$$

Or la famille $(\omega_j^i)_{j=1,...,t_i}$ forme une $K$-base de $H^i$, donc linéairement indépendantes ce qui montre que $a_j = 0 \quad \forall j = 1, ..., t_i$, donc la famille $(\epsilon_j^i)_{j=1,...,t_i}$ est linéairement indépendante. à partir de la famille $(\epsilon_j^i)_{j=1,...,t_i}$ et on ajoutons $\epsilon_{t_i+1}^i, ..., \epsilon_{s_i}^i$ à cette famille de sorte que la famille $(\epsilon_j^i)_{j=1,...,s_i}$ forme une $K$-base de $Z^i$
Maintenant, on définit le morphisme $\beta$ par

$$\begin{array}{rcl} \beta : H^i & \to & Z^i \\ \omega_j^i & \mapsto & \beta(\omega_j^i) = \epsilon_j^i \end{array}$$

qui nous permettera à ecrire

$$\alpha : Z^i \rightleftarrows H^i : \beta, \qquad \forall i \tag{1.3}$$

avec $\alpha \circ \beta = 1_{H^i}$ mais $\beta \circ \alpha \neq 1_{Z^i}$

ce qui nous permettera d'énoncer le lemme suivant

**Lemme 1.4.8** *Soient $V$ un espace vectoriel et $U$ un sous-espace vectoriel de $V$ tel que la suite exacte courte suivante existe*

$$0 \to U \to V \rightleftarrows V/U \to 0$$

*alors nous avons une égalité à isomorphisme pret ( ou tout simplement un isomorphisme )*

$$V \simeq U \oplus V/U \tag{1.4}$$

**Preuve :**

Soient $k$ un corps algébriquement clôs, de caractéristique zéro et $V$ un espace vectoriel sur $k$.

Soit $U$ un sous espace vectoriel de $V$, donc nous avons un sous espace vectoriel $V/U$ et on choisit $B_{V/U} = \{u_1, ..., u_m\}$ une $K$-base de $V/U$. On choisit $m$ éléments $v_1, ..., v_m$ de $V$ et deux morphismes $\alpha$ et $\beta$ tel que

$$\begin{array}{rcll} \alpha : V & \to & V/U & \\ v_j & \mapsto & u_j, & \forall j = 1, ..., m \\ \beta : V/U & \to & V & \\ u_j & \mapsto & v_j, & \forall j = 1, ..., m \end{array}$$

comme mentionner dans (2.3)
On a $V/U \subset V$, donc on peut choisir le morphisme $\alpha$ et les éléments $v_1, ..., v_m$ de sorte que $u_j = v_j$ modulo $U \quad \forall j = 1, ..., m$
et par le morphisme $\beta$ on a $\forall v \in V, \exists u_j \in V/U$ tel que $\beta(v) = u_j$, donc il existe un élément $u \in U$ tel que $u_j = v - u$ d'où

$$\forall v \in V, \exists u_j \in V/U, \exists u \in U \quad \text{ tel que } v = u + u_j$$

ce qui montre que

$$V = U \oplus V/U$$

On appliqant le lemme 1.4.8 sur notre construction, nous trouvons le résultat suivant

$$Z^i = B^i \oplus H^i, \qquad \forall i \tag{1.5}$$

D'une manière analogue sur la deuxième inclusion $Z^i \subset \mathcal{C}^i$, nous avons l'injection

$$Z^i \to \mathcal{C}^i$$

qui nous permettera de définir une famille de suites exactes courtes pour tout $i$

$$Z^i \to \mathcal{C}^i \rightleftarrows \mathcal{C}^i/Z^i$$

et on appliquant le lemme 1.4.8 nous avons

$$\mathcal{C}^i = Z^i \oplus \mathcal{C}^i/Z^i, \qquad \forall i \tag{1.6}$$

**Théorème 1.4.9** *Soient $K$ un corps algébriquement clôs de caractéristique zéro et $(C, d)$ un complexe des $K$-espaces vectoriels*

$$... \to \mathcal{C}^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{C}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{C}^{i+1} \to ...$$

*tels que $d^2 = 0, \forall i$, alors*

$$\forall i, \quad \mathcal{C}^i \cong B^i \oplus H^i \oplus \mathcal{C}^i/Z^i$$

**Preuve 1.4.10** *On a*

$$\begin{array}{cccll} \forall i & \mathcal{C}^i & \cong & Z^i \oplus \mathcal{C}^i/Z^i & \textit{par } (2.6) \\ & & \cong & B^i \oplus H^i \oplus \mathcal{C}^i/Z^i & \textit{par } (2.5) \end{array}$$

## 1.5 Les complexes parfaits

Dans la suite on note par $\mathcal{O}_X$-module les $\mathcal{O}_X$-modules sur un espace $X$ muni de la topologie de Zariski.

**Définition 1.5.1** *On fixe un $m \in \mathbb{Z}$, un complexe $E^{\cdot}$ des $\mathcal{O}_X$-modules sur un schéma $X$ est strictement $m$-pseudo-cohérent si pour tout $m$, pour tout $i \geq m$, $E^i$ est un fibré vectoriel algébrique sur $X$ et $E^i = 0$ pour tout $i$ suffisamment grand.*

**Définition 1.5.2** *Si le complexe $E^{\cdot}$ est strictement pseudo-cohérent pour tout entier $m$, alors le complexe $E^{\cdot}$ est strictement pseudo-cohérent.*

**Définition 1.5.3** *Un complexe $E^{\cdot}$ des $\mathcal{O}_X$-modules est strictement parfait s'il est strictement pseudo-cohérent est strictement borné. Autrement dit : Un complexe strictement parfait est un complexe strictement borné des fibrés vectoriels algébriques.*

**Lemme 1.5.4** *Soit $A^{\cdot}$ un complexe des $\mathcal{O}_X$-modules avec $H^i(A^{\cdot}) = 0, \forall i \geq m+1$. Alors $H^m(A^{\cdot})$ est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini si $\forall x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ et un isomorphisme dans la catégorie dérivé $D(\mathcal{O}_U$-mod) entre la restriction $A^{\cdot}\backslash U$ et un complexe strictement $m$-pseudo-cohérent sur $U$.*

**Lemme 1.5.5** *Sur un schéma $X$, les conditions suivantes sont équivalantes pour tout complexe $E^{\cdot}$ de $\mathcal{O}_X$-modules*

*i- Pour tout points $x \in X$, il y'a un voisinage $U$ de $x$, un complexe $n$-pseudo-cohérent $F^{\cdot}$ et un quasi-isomorphisme $F^{\cdot} \to E^{\cdot}\backslash U$ .*

*ii- Pour tout points $x \in X$, il y'a un voisinage $U$ de $x$, un complexe strictement parfait $F^{\cdot}$ et un $n$-quasi-isomporphisme $F^{\cdot} \to E^{\cdot}\backslash U$ .*

*iii- Pour tout points $x \in X$, il y'a un voisinage $U$ de $x$, un complexe strictement $n$-pseudo-cohérent $F^{\cdot}$ et un isomorphisme entre $F^{\cdot}$ et $E^{\cdot}\backslash U$ dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_U$-mod).*

*iv- Pour tout points $x \in X$, il y'a un voisinage $U$ de $x$, un complexe strictement parfait $F^{\cdot}$ et un quasi-isomorphisme $F^{\cdot} \to E^{\cdot}\backslash U$ dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_U$-mod).*

*(autrement dit : il y'a une application dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_U$-mod) qui induit un épimorphisme sur $H^n$ et un isomorphisme sur $H^k, k \geq n+1$)*

**Définition 1.5.6** *Un complexe $E^{\cdot}$ des $\mathcal{O}_X$-modules sur un schéma $X$ est $n$-pseudo-cohérent si l'une des conditions du lemme* (1.5.5) *est vérifie. Le complexe $E^{\cdot}$ est un complexe pseudo-cohérent s'il est un $n$-pseudo-cohérent pour tout $n$.*

La propriété de la pseudo-cohérence de $E^{\cdot}$ dépends uniquement des classes des quasi-isomorphismes de $E^{\cdot}$, et c'est une propriété locale sur $X$. Les cohomologies des faisceaux $H^*(E^{\cdot})$ des complexes pseudo-cohérents sont tous des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. Si $X$ est quasi-compact et $E^{\cdot}$ est pseudo-cohérent, alors, il existe un $N$ tel que $H^k(E^{\cdot}) = 0; \forall k N$. Cette propriété est vrais localement sur $X$.

**Lemme 1.5.7** *Les conditions suivantes sur un complexe $E^\cdot$ de $\mathcal{O}_X$-modules sur un shéma $X$ sont équivalantes*

*i- pour tout points $x \in X$, il éxiste un voisinage $U$ de $x$, un complexe strictement parfait $F^\cdot$ et un quasi-isomorphisme $F^\cdot \to E^\cdot \backslash U$.*

*ii- pour tout points $x \in X$, il éxiste un voisinage $U$ de $x$, un complexe strictement parfait $F^\cdot$ et un isomorphisme entre $E^\cdot \backslash U$ et $F^\cdot$ sur $D(\mathcal{O}_X$-mod).*

**Définition 1.5.8** *Un complexe $E^\cdot$ de $\mathcal{O}_X$-modules sur un schéma est dit parfait s'il est localement quasi-isomorphe à un complexe strictement parfait.*

Autrement dit : si les deux conditions du lemme (1.5.7) sont vérifies.

**Définition 1.5.9** *Soit $B$ un anneau commutatif unitaire et soit $(C, d)$ un complexe*

$$... \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \to ...$$

*tels que les $d^i$ sont des applications linéaires tels que $d^i \circ d^{i-1} = 0, \quad \forall i$. Un tel complexe est dit strictement parfait s'il est de longueur fini et si les $B$-modules $C^i$ sont libres du rangs finis.*

**Définition 1.5.10** *Si on munit les $C^i$ par des $B$-bases $\{\beta^i_{s_1}, ..., \beta^i_{s_n}\}$, on dit que ce complexe est strictement parfait rigidifié et on le note par $(C^i, d, \beta^i_{s_1}, ..., \beta^i_{s_n})$.*

## 1.6 Localisation

### 1.6.1 Localisation Classique

**Définition 1.6.1** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $\mathcal{W}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$. La localisation de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{W}$ ou la $\mathcal{W}$-localisation de $\mathcal{C}$ est une catégorie notée par $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ obtenue par inversement des flèches de la catégorie $\mathcal{W}$, autrement dit, $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est la catégore qui contient les mêmes objets que $\mathcal{C}$ mais ses flèches sont tous inversibles.*

On note qu'il y'a un foncteur universel $p : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ qui envoie les flèches de $\mathcal{W}$ sur des isomorphismes.

**Définition 1.6.2** *La sous-catégorie $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}$ est dit fermée si elle contient exactement tout les fléches de $\mathcal{C}$ qui ont un inverse par le foncteur $p$.*

**Définition 1.6.3** *La clôture d'une sous-catégorie $\mathcal{W}$ est la plus petite catégorie contenant $\mathcal{W}$ est vérfiant la définition précidente.*

On a la proposition suivante :

**Proposition 1.6.4** *Soit $\mathcal{W}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$ et soit $\mathcal{W}'$ sa cloture, alors, on a un isomorphisme*

$$\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{C}[\mathcal{W}'^{-1}].$$

**Proposition 1.6.5** *Si $\mathcal{C} = \mathcal{D} * \mathcal{W}$ avec $\mathcal{W}$ une catégorie libre, alors on a une équivalence homotopique $N_p$*

$$N(\mathcal{D} * \mathcal{W}) = N(\mathcal{C}) \xrightarrow{N_p} N(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]) = N(\mathcal{W}^{-1}) = N(\mathcal{D} * \mathcal{W}[\mathcal{W}^{-1}])$$

*tel que $N$ est le foncteur nerf.*

### 1.6.2 Localisation simplicial standard (à la Dwyer-Kan) $L_{DK}$

**Définition 1.6.6** *Soit $\mathcal{C} \in Cat$ et $\mathcal{W}$ une sous catégorie de $\mathcal{C}$. Une localisation simpliciale standard de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{W}$ est la catégorie simpliciale $L(\mathcal{C}, \mathcal{W}) \in sCat$ définie par*

$$L(\mathcal{C}, \mathcal{W}) = F_*\mathcal{C}[F_*\mathcal{F}^{-1}]$$

*où $F_*\mathcal{C}$ est la résolution standard de $\mathcal{C}$*

**Remarque 1.6.7** *La localisation simplicial standard d'une catégorie admet comme catégorie de ses composantes la localisation classique de la même catégorie*

*autrement dit*

$$\pi_0 L\mathcal{C} = \mathcal{C}[\mathcal{V}^{-1}]$$

# Chapitre 2

# Les $n$-Catégories et les $n$-Champs

## 2.1 Définitions et Propriétés

### 2.1.1 Les $n$-catégories strictes

**Définition 2.1.1** *Une 2-catégorie stricte $\mathcal{A}$ est une collection des objets $\mathcal{A}_0$ avec, pour tout paire d'objets $x, y \in \mathcal{A}_0$, on a une catégorie $\mathcal{A}(x, y)$ associée à des foncteurs*

$$\mathcal{A}(x, y) \times \mathcal{A}(y, z) \to \mathcal{A}(x, z)$$

*qui forment une loi de multiplication strictement associative tels que l'élément unité existe.*

*Un tel élément sera noté par $1_x \in \mathcal{A}(x, x)$ vérifie les propriétés :*

- *La multiplication par $1_x$ agit trivialement sur les objets de $\mathcal{A}(x, y)$ ou $\mathcal{A}(y, x)$ .*
- *La multiplication par $1_{1_x}$ agit trivialement sur les morphismes de $\mathcal{A}(x, y)$*

**Définition 2.1.2** *On définit une 3-catégorie stricte $\mathcal{C}$ de la même façon que dans la définition (2.1.1) sauf que les $\mathcal{C}(x, y)$ seront des 2-catégories strictes.*

Et par récurrence sur $n$, et si on suppose connaître la définition des $(n-1)$-catégories strictes et que cette catégorie est fermée sous le produit cartésien, on a :

**Définition 2.1.3** *Une $n$-catégorie stricte $\mathcal{C}$ est une catégorie enrichie sur la catégorie des $(n-1)$-catégories strictes.*

*Autrement dit : $\mathcal{C}$ est composée de l'ensemble des objets $Ob(\mathcal{C})$ associée par, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ d'un morphisme-objet $\mathcal{C}(x, y)$ qui est une $(n-1)$-catégorie stricte associée à une loi de composition strictement associative donnée par des $(n-1)$-foncteurs*

$$\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z) \to \mathcal{C}(x, z)$$

*et d'un morphisme $1_x : * \to \mathcal{C}(x, x)$ où $*$ est l'objet co-initial.*

La catégorie des $n$-catégories strictes est notée par $nStrCat$ et elle est donnée par :

- Les objets de $nStrCat$ sont les $n$-catégories strictes.
- Les flèches sont les transformation entre des $n$-catégories strictes qui préservent strictement les structures.

**Définition 2.1.4** *On défint la $n$-catégorie produit stricte $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux $n$-catégorie strictes par :*

$$ob(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') := ob(\mathcal{C}) \times ob(\mathcal{C}')$$

*et*

$$\forall (x, x'), (y, y') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}' : \quad \mathcal{C} \times \mathcal{C}'((x, x'), (y, y')) := \mathcal{C}(x, y) \times_{nStrCat} \mathcal{C}'(x', y').$$

### 2.1.2 Les $n$-catégories

On généralise la notion des $n$-catégories strictes par celle des $n$-catégories, en commençant par donner la définition :

**Définition 2.1.5** *Une $n$-catégorie $\mathcal{A}$ est la donnée par :*

*(Ob)- Un ensemble d'objets qu'on notera par $ob(\mathcal{A})$.*

*(Hom)- Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x, y \in ob(\mathcal{A})$ , il existe une $(n-1)$-catégorie des morphismes entre $x$ et $y$ qu'on note par $\underline{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ .*

*A partir de (ob) et (Hom) on peut avoir pour tout $i : 0 \leq i \leq n$, une familles d'ensembles qu'on appel les ensembles des $i$-morphismes de $\mathcal{A}$.*

*(PS)- Le produit cartisien et la somme disjoint des $n$- catégories vérifient pour toutes $n$-catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ :*

$$ob(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = ob(\mathcal{A}) \times ob(\mathcal{B}) \quad et \quad ob(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}) = ob(\mathcal{A}) \sqcup ob(\mathcal{B})$$

On peut définir l'ensemble des $i$-morphismes de la $n$-catégorie $\mathcal{A}$ de la manière suivante : On donne la $(n-1)$-catégorie des morphismes de la $n$-catégorie $\mathcal{A}$ par

$$\underline{Hom}[\mathcal{A}] := \coprod_{x,y \in ob(\mathcal{A})} \underline{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y).$$

Par intuition, par récurrence sur $i : 0 \leq i \leq n$ , on peut donner les $(n-i)$-catégories des $i$-morphismes de la $n$-catégorie $\mathcal{A}$ par

$$\underline{Hom}^i[\mathcal{A}] := \underline{Hom}[\underline{Hom}[\cdots \underline{Hom}[\mathcal{A}] \cdots]].$$

**Remarque 2.1.6** *Quand $i = 0$ on a $\underline{Hom}^0[\mathcal{A}] := ob(\mathcal{A})$ et quand $i = n$ on a $\underline{Hom}^n[\mathcal{A}]$ est juste un ensemble.*

**Définition 2.1.7** *L'ensemble des $i$-morphismes de la $n$-catégorie $\mathcal{A}$ sera donc définit par*

$$Hom^i[\mathcal{A}] := ob(\underline{Hom}^i[\mathcal{A}]).$$

Donc on peut écrire pour tout $i$ :

$$\underline{Hom}^i[\mathcal{A}] = \coprod_{x,y \in Hom^{i-1}[\mathcal{A}]} \underline{Hom}_{\underline{Hom}^{i-1}[\mathcal{A}]}(x,y),$$

et par la compatibilité des objets avec le coproduit, on obtient

$$Hom^i[\mathcal{A}] = \coprod_{x,y \in Hom^{i-1}[\mathcal{A}]} ob(\underline{Hom}_{\underline{Hom}^{i-1}[\mathcal{A}]}(x,y)).$$

En particulier, on a les application source $s$ et but $b$ telles que

$$\begin{array}{rcl} (s_i, b_i) : Hom^i[\mathcal{A}] & \to & (Hom^{i-1}[\mathcal{A}])^2 \\ f & \mapsto & (s_i(f), b_i(f)) := (x,y). \end{array}$$

Pour $u, v \in Hom^i[\mathcal{A}]$, on note par $Hom^{i+1}_{\mathcal{A}}(u,v)$ l'ensemble d'arrivé du couple $(u,v)$ par les applications $(s_{i+1}, b_{i+1})$. Cette ensemble est non vide seulement pour $s_i(u) = s_i(v)$ et $b_i(u) = b_i(v)$. Avec la notation $Hom^{i+1}_{\mathcal{A}}(u,v)$ on généralise cette notion , et on obtient ainsi une $(n-i-1)$-catégorie qu'on note par $\underline{Hom}^{i+1}_{\mathcal{A}}(u,v)$ .

En combinant les deux conditions $(ob)$ et $(Hom)$ ensemble, et avec la compatibilité avec la somme dans $(PS)$, on peut avoir à partir d'une $n$-catégorie, une collection d'ensembles

$$Hom^0[\mathcal{A}] = ob(\mathcal{A}), Hom^1[\mathcal{A}], \cdots, Hom^n[\mathcal{A}]$$

associé aux deux applications

$$s_i, b_i : Hom^i[\mathcal{A}] \to Hom^{i-1}[\mathcal{A}].$$

Les deux applications $s_i$ et $b_i$ satisfaisant les compositions suivantes :

$$s_i s_{i+1} = s_i b_{i+1} \qquad \text{et} \qquad b_i s_{i+1} = b_i b_{i+1}.$$

On rappel ici que la notion d'identité sur un objet $x$ ce n'est qu'un élément $1_x \in Hom_{\mathcal{A}}(x,x)$ pour $x \in ob(\mathcal{A})$. En général, on ne peut pas toujours avoir l'identité mais par contre on sait qu'elle existe à homotopie près.

**Définition 2.1.8** *Pour tout $i : 0 \leq i \leq n$, on définit le morphisme*

$$e_i : Hom^i[\mathcal{A}] \to Hom^{i+1}[\mathcal{A}]$$

*tel que $s_{i+1}e_i(u) = u$ et $b_{i+1}e_i(u) = u$. On appelle $e_i(u)$ le $(i+1)$-morphisme identité du $i$-morphisme $u$.*

### 2.1.3 Les $n$-groupoïdes

Notons qu'un groupoïde ce n'est qu'une catégorie dont les morphismes sont inversibles. mais comme on a définit des $n$-catégories et des $n$-catégories strictes, on va avoir les $n$-groupoïdes et les $n$-groupoïdes strictes.

**Définition 2.1.9** *Vu que les 0-catégories sont tout simplement des ensembles, alors tout les 0-catégories sont des 0-groupoïdes, dont les isomorphismes entre ensembles sont les équivalences entre les 0-groupoïdes.*

Plus généralement, pour $n \geq 1$ on donne les définitions suivantes :

**Définition 2.1.10** *Un $n$-groupoïde strict est une $n$-catégorie stricte telle que pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x, y)$ est un $(n-1)$-groupoïde , et pour tout 1-morphisme $u : x \to y$ dans $\mathcal{A}$, les deux morphismes de composition avec $u$*

$$\mathcal{A}(y, z) \to \mathcal{A}(x, z) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(w, x) \to \mathcal{A}(w, y)$$

*sont des équivalences entre $(n-1)$- groupoïdes strictes.*

**Définition 2.1.11** *Un morphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux $n$-groupoïdes est éssentiellement surjectif si pour tout $x \in ob(\mathcal{B})$, il existe un objet $z \in ob(\mathcal{A})$ et un morphisme $u \in ob(\mathcal{B}(x, f(z)))$.*

**Définition 2.1.12** *Un morphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux $n$-groupoïdes est pleinement fidèle, si pour tout $x, y \in ob(\mathcal{A})$, l'application $\mathcal{A}(x, y) \to \mathcal{B}(f(x), f(y))$ est une équivalence de $(n-1)$-groupoïdes.*

**Définition 2.1.13** *Un morphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux $n$-groupoïdes est une équivalence s'il est pleinement fidèle et éssentiellement surjectif.*

Soit $\mathcal{A}$ est un $n$-groupoïde, et $x, y \in ob(\mathcal{A})$. On dit que $x$ et $y$ sont à équivalence interne s'il existe une flèche entre eux. Autrement dit si l'ensemble $ob(\mathcal{A}(x, y))$ est non vide , alors il existe une équivalence interne entre les deux objets $x$ et $y$.

**Remarque 2.1.14** On note par $nStrGpd \subset nStrCat$ la sous catégorie pleine des $n$-groupoïdes stricts.

**Lemme 2.1.15** *Soit $\mathcal{A}$ est un $n$-groupoïde, et $x, y \in ob(\mathcal{A})$. Si l'ensemble $ob(\mathcal{A}(x, y))$ est non vide alors l'ensemble $ob(\mathcal{A}(y, x))$ est non vide aussi. Cela signifie que la relation d'équivalence interne est une relation d'équivalence.*

Pour un $n$-groupoïde $\mathcal{A}$, on note par $\pi_0(\mathcal{A})$ le quotient de $ob(\mathcal{A})$ par la relation d'équivalence interne. Ce quotient est compatible avec le produit :

$$\pi(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cong \pi(\mathcal{A}) \times \pi(\mathcal{B}).$$

Une autre notation pour $\pi_0(\mathcal{A})$ vu comme un 0-groupoïde est comme une troncation négative $\tau_{\leq 0}(\mathcal{A})$.

On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ est une $n$-catégorie stricte telle que pour tout $x$ et $y$ dans $ob(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}(x, y)$ est un $(n)$-groupoïde. On construit maintenant une nouvelle 1-catégorie qu'on note par $\tau_{\leq 1}(\mathcal{A})$ avec

$$ob(\tau_{\leq 1}(\mathcal{A})) := ob(\mathcal{A}),$$

et ses morphismes seront définis par

$$(\tau_{\leq 1}(\mathcal{A}))(x, y) := \pi_0(\mathcal{A}(x, y)).$$

La composition est définit par compatibilité avec le produit :

$$(\tau_{\leq 1}(\mathcal{A}))(y, z) \times (\tau_{\leq 1}(\mathcal{A}))(x, y) \to (\tau_{\leq 1}(\mathcal{A}))(x, z),$$

en appliquant cette composition en remlaçant par $\pi_0$ on trouve

$$\pi_0(\mathcal{A}(y, z)) \times \pi_0(\mathcal{A}(x, y)) = \pi_0(\mathcal{A}(y, z) \times \mathcal{A}(x, y)) \to \pi_0(\mathcal{A})(x, z))$$

**Définition 2.1.16 (Équivalence interne des $i$-morphismes)** *Soit $u, v \in Hom^i(\mathcal{A})$, on dit que $u$ et $v$ sont à équivalence interne si*

*1.*

$$s(u) = s(v) \quad \textit{et} \quad t(u) = t(v).$$

*2.*

$$\exists g \in Hom^{i+1}(\mathcal{A}) \quad \textit{tel que } s(g) = u \quad \textit{et} \quad t(g) = v.$$

*Pour les $n$-morphismes, l'équivalence interne est la même chose que l'égalité.*

**Corollaire 2.1.17** *La relation d'équivalence interne entre les $i$-morphisme est une relation d'équivalence.*

**Corollaire 2.1.18** *Soit $\mathcal{A}$ un $n$-groupoïde stricte, alors la 1-catégorie $\tau_{\leq 1}(\mathcal{A})$ est un 1-groupoïde, et $\pi_0(\mathcal{A})$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\tau_{\leq 1}(\mathcal{A})$.*

Plus généralement, on rappel le théorème démontré dans [SIMP]

**Théorème 2.1.19** *Soit $\mathcal{A}$ un $n$-groupoïde, alors pour tout $k : 0 \leq k \leq n$, il existe un $k$-groupoïde stricte $\tau_{\leq k}(\mathcal{A})$ dont les $i$-morphismes sont ceux de $\mathcal{A}$ pour $i < k$ et les $k$-morphismes sont les classes d'équivalences des $k$-morphismes de $\mathcal{A}$ sous la relation d'équivalence des équivalences internes. On peut voir toute $k$-catégorie comme une $n$-catégorie,* *la projection naturelle $\mathcal{A} \to \tau_{\leq k}(\mathcal{A})$ est un morphisme des n-catégories. la troncation est compatible avec les cas $k = 0, 1$ , et elle est aussi compatible avec le produit cartisien :*

$$\tau_{\leq k}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \tau_{\leq k}(\mathcal{A}) \times \tau_{\leq k}(\mathcal{B}).$$

*Si $k \geq 1$ alors $ob(\tau_{\leq k}(\mathcal{A})) = ob(\mathcal{A})$ et pour deux objets $x, y$ on a*

$$(\tau_{\leq k}(\mathcal{A}))(x, y) = \tau_{\leq k}(\mathcal{A}(x, y)).$$

*Pour $0 \leq k \leq k' \leq n$ on a*

$$\tau_{\leq k}(\tau_{\leq k'}(\mathcal{A})) = \tau_{\leq k}(\mathcal{A}).$$

*la troncation préserve la notion d'équivalence, autrement dit si*

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

*est une équivalence entre k-groupoïdes, alors*

$$\tau_{\leq k}(f) : \tau_{\leq k}(\mathcal{A}) \to \tau_{\leq k}(\mathcal{B})$$

*est aussi une équivalence entre groupoïdes.*

Un cas très particulier est celui d'un $n$-groupoïde avec un seul objet, on donne une brève définition

**Définition 2.1.20** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à avec un seul objet $x$. Alors $\mathcal{C}$ est un n-groupoïde si et seulement si $\mathcal{C}(x, x)$ est un $(n-1)$-groupoïde et $\pi_0(\mathcal{C}(x, x))$ est un groupe.*

### 2.1.4 L'intérieur

**Définition 2.1.21** *Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(\infty,1)}$ une $(\infty, 1)$-catégorie, on définit $\mathcal{A}^{(\infty,0)}$ comme la $(\infty, 0)$-catégorie intérieur à $\mathcal{A}$.*

*Si on considère $\mathcal{A}^{(\infty,0)}(X, Y)$ comme le sous-ensemble simplicial de $\mathcal{A}^{(\infty,1)}(X, Y)$ en ne prenant que les morphismes inversibles, la sous-catégorie $\mathcal{A}^{(\infty,0)} \subseteq \mathcal{A}^{(\infty,1)}$ peut être vue comme une quasi-catégorie ou un foncteur vers un ensemble simplicial de Kan, et on note*

$$\mathcal{A}^{es} := \mathcal{A}^{(\infty,0)}$$

On définit plus précisément le nerf bisimplicial de cette catégorie par

$$\begin{aligned}
(\mathcal{N}\mathcal{A})_{0,m} &= ob(\mathcal{A}) \\
(\mathcal{N}\mathcal{A})_{n,m} &= \coprod_{\substack{x_0,\ldots,x_n \\ x_i \in ob(\mathcal{A})}} \mathcal{A}(x_0, x_1)_m \times \ldots \times \mathcal{A}(x_{n-1}, x_n)_m.
\end{aligned}$$

Un tel objet simplicial correspond à un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \Delta^{\cdot} \times \Delta^{\cdot} & \to & \mathcal{E}ns \\ (n,m) & \mapsto & (\mathcal{N}\mathcal{A})_{n,m} \end{array}$$

tel que les $(\mathcal{N}\mathcal{A})_{n,\cdot} \in \mathcal{E}ns^{\Delta^{\cdot}}$

Les morphismes de Ségal sont des isomorphismes

$$(\mathcal{N}\mathcal{A})_{n,\cdot} \xrightarrow{\cong} (\mathcal{N}\mathcal{A})_{1,\cdot} \times_{(\mathcal{N}\mathcal{A})_{0,\cdot}} \dots \times_{(\mathcal{N}\mathcal{A})_{0,\cdot}} (\mathcal{N}\mathcal{A})_{1,\cdot}$$

Pour une $(\infty,1)$-catégorie, on a son intérieur

$$\mathcal{A}^{(\infty,0)} \subset \mathcal{A}^{(\infty,1)} \quad \text{et} \qquad (\mathcal{A}^{es})_n := (\mathcal{A}^{(\infty,0)})_{(n,n)}$$

ce sont les éléments de la diagonale.

### 2.1.5 Les catégories simpliciales

On note par $\Delta$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis totallement ordonnés qu'on les note par

$$[n] = \{0,1,...,n\}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Les flèches de $\Delta$ sont des applications monotones

$$\delta : [n] \to [m]$$

telles que

$$0 \leq \delta(i) \leq \delta(j) \leq m \quad \forall 0 \leq i \leq j \leq n$$

Les flèches $\delta$ sont engendrées par deux genres de familles de morphismes

$$p_i : \begin{array}{rcl} [n-1] & \to & [n] \\ j < i & \mapsto & j \\ j \geqslant i & \mapsto & j+1 \end{array} \quad ; \qquad q_i : \begin{array}{rcl} [n+1] & \to & [n] \\ j \leqslant j & \mapsto & j \\ j > i & \mapsto & j-1 \end{array}$$

de sorte que

$$\delta = p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_s}q_{j_1}.q_{j_2}...q_{j_t}$$

où $i_1, i_2, ..., i_s$ dans l'ordre décroissant sont les éléments de $[m]$ qui ne sont pas atteints par $\delta$, et $j_1, j_2, ..., j_t$ dans l'ordre croissant les éléments de $[n]$ tels que $\delta(j) = \delta(j+1)$ et $n - t = m - s$.

**Remarque 2.1.22** *On peut voir les ensembles simpliciaux comme des objets simpliciaux dans $\mathcal{E}ns$, un ensemble siplicial est un préfaisceau sur $\Delta$*

### 2.1.6 Le nerf simplicial

Dans la suite, on note par $Cat$ la catégorie des (petites) catégories dont les objets sont des catégories et les flèches sont les foncteurs entre catégories.

**Remarque 2.1.23**
- *Toutes les catégories simpliciales peuvent être considérées comme des objets simpliciaux de $Cat$ .*
- *Dans une catégorie simplicial les objets ne forment pas un objets simplicial, mais plutôt un ensemble simplicial discret.*
- *les ensembles simpliciaux peuvent être confondus avec leurs 0-simplexes.*

Soit $C$ un objet de $Cat$, le nerf de $C$ qu'on le note par N(C) est un ensemble simplicial qui est donné en degré $n$ par

$$N(C)_n = \{X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} ... \xrightarrow{f_{n-1}} X_n\}$$

En faisons parcourir $n$ dans $\mathbb{N}$.

On dit qu'un ensemble $S$ est prèordonné s'il est muni d'une relation d'ordre $\prec$ reflixive et transitive. Un pré-ordre sur un ensemble $S$ peut être considéré comme une petite catégorie dont les objets sont les éléments de $S$ et les flèches sont définies par : pour tout $x, y \in S$ si $x \prec y$ alors il existe un et un unique morphisme $x \to y$.

Soit $\mathcal{E}ns$ la catégorie dont les objets sont les ensembles et les flèches sont les morphismes entre ensembles.

Soit $Cat$ la catégorie dont les objets sont les (petites) catégories et les flèches sont les morphismes entre les catégories.

Soit $C \in ob(Cat)$, le nerf de $C$ qu'on le note par $N(C)$ est l'ensemble simplicial $\mathcal{H}om(h(-), C)$ avec $h : \Delta \to Cat$ est un foncteur pleinement fidèl qui associe à tout objet $[n]$ de $\Delta$ la catégorie associée à l'ensemble linéairement ordonné $\{0, ..., n\}$.

**Définition 2.1.24** *Le nerf d'une catégorie est un foncteur*

$$N : Cat \to Ens^{\Delta^{op}}$$

**Définition 2.1.25** *Un pré-nerf est un foncteur contravariant $\Phi : \Delta \to Ens$.*

On donne une deuxième définition d'un nerf (1-nerf) par la proposition suivante

**Proposition 2.1.26** *Un pré-nerf $\Phi : \Delta \to Ens$ est un 1-nerf si et seulement si pour tout entier $m \geqslant 2$ l'application*

$$\begin{array}{ccc} \Phi_m & \xrightarrow{\delta_{[m]}} & \Phi_1 \times_{\Phi_0} \Phi_1 \times_{\Phi_0} ... \times_{\Phi_0} \Phi_1 \\ x & \longmapsto & (\delta'_{0,1}(x), ..., \delta'_{m-1,m}(x)) \end{array}$$

*est une bijection tel que $\forall i, j \in \{0, ..., m\}$; $\delta_{ij} : [1] \to [m]$ est l'application qui envoie $0 \mapsto i$ et $1 \mapsto j$ et $\delta'_{ij} = \Phi(\delta_{ij})$*

L'application du nerf simplicial sur la catégorie $\mathcal{C}$ nous donne une quasi-catégorie qui est la 1-catégorie donnée pour tout $n$ par :

$$N(\mathcal{C})_n = Hom(I^{(n)}, \mathcal{C}) \quad \text{où} \quad I^{(n)} := \cdot_0 \to \cdot_1 \to \cdots \to \cdot_n$$

La catégorie $I^{(n)}$ représente un foncteur $\Delta \to Cat$, donc les objets de $I^{(n)}$ sont des objets cosimpliciaux de $Cat$. On les remplace par d'autres objets cosimpliciaux dans $SCAT$ tel que

$$\begin{array}{ccl} n & \mapsto & \Sigma^{(n)} \text{ "catégorie simplicial".} \\ & & \downarrow\sim \\ & & I^{(n)} \end{array}$$

On cherche à décrire les flèches dans $\Sigma^{(n)}$ on se basant sur celles de $I^{(n)}$.

- Pour $n = 1$ : $\Sigma^{(1)} = I^{(1)} = \cdot \to \cdot$
- Pour $n = 2$ : les objets de $\Sigma^{(2)}$ sont $u_0, u_1, u_2$ , donc les flèches dans $\Sigma^{(2)}$ vont être :

  $$u_0 \to u_1, \quad u_1 \to u_2, \quad u_0 \to u_2 \quad \text{et} \quad u_0 \to u_1 \to u_2$$

  donc

  $$\Sigma^{(2)}(u_0, u_2) = \Delta^{[1]} = \{[2] \to [1]\}$$

  et un morphisme $r_{ij} : \Sigma^{(1)} \to \Sigma^{(2)}$ va être définit pour tout $i \in \{0, 1\}$ et tout $j \in \{0, 1, 2\}$ comme un morphisme $[1] \to [2]$, par exemple $r_{02} = \{0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2\}$. $\Delta^{[1]}$ correspond à un complexe "$k \xrightarrow{d} k^2$" tel que pour $u \in k$, on a $d(u) = a - b$ avec $(a, b) \in k^2$.
  On rappel ici que $\Delta^{[k]}$ est l'ensemble simplicial donné pour tout $n$ par

  $$(\Delta^{[k]})_n = \{[n] \to [k]\}$$

- En général, pour $n$ quelconque , on pose $\Sigma^{(n)}$ tel que $ob(\Sigma^{(n)}) = \{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$. Pour tout $i, j$, on définit les connexions de la manière suivante :

  $$\Sigma^{(n)}(u_i, u_j) = \begin{cases} \phi & \text{si} \quad i > j \\ (\Delta^{[1]})^{j-i-1} & \text{si} \quad j \geq i. \end{cases}$$

  Par exemple pour $n = 3$ on a :

  $$\Sigma^{(3)}(u_0, u_3) = (\Delta^{[1]})^2 \quad \text{ça donne un carré.}$$

Maintenant on a une application

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \to & SCAT \\ n & \mapsto & \Sigma^{(n)} \end{array}$$

Supposons une catégorie $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}(x, y)$ satisfait aux conditions de Kan, pour tout $n$, le nerf simplicial appliqué sur $\mathcal{C}$ va définir une quasi-catégorie associée à $\mathcal{C}$ :

$$N(\mathcal{C})_n = Fonct(\Sigma^{(n)}, \mathcal{C})$$

donc on a une connexion entre la catégorie simpliciale $SCAT$ et la quasi-catégorie $QCat$.

## 2.2 Les DG-catégories

### 2.2.1 Les DG-Algèbres et les DG-Modules

Soit $A$ un anneau commutatif, avec un élément unité non nul.

**Définition 2.2.1** *soit $\mathcal{A}$ une A-algbre. On dit que $\mathcal{A}$ est une algbre graduée si l'on s'est donné des sous-A-modules $\mathcal{A}_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ dont $\mathcal{A}$ est somme directe*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_k$$

*tels que*

$$\begin{cases} \mathcal{A}_k = 0 & , \qquad \forall k < 0; \\ xy \in \mathcal{A}_{k+h} & , \qquad \forall x \in \mathcal{A}_k, \forall y \in \mathcal{A}_h. \end{cases} \tag{2.1}$$

**Remarque 2.2.2**

1. $1 \in \mathcal{A}_0$.
2. Un élément de $\mathcal{A}_k$ est dit homogène de degré $k$.

**Définition 2.2.3** *Une algèbre $\mathcal{A}$ est anti-commutative si*

$$xy = (-1)^{kh} yx \qquad \forall x \in \mathcal{A}_k, \quad \forall y \in \mathcal{A}_h. \tag{2.2}$$

**Définition 2.2.4** *Une différentielle sur une algèbre graduée $\mathcal{A}$ est une application A-linéaire $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telle que*

$$\begin{cases} d^2 = 0 & ; \\ d(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{A}_{k-1} & ; \\ d(xy) = (dx)y + (-1)^k x(dy) & \forall x \in \mathcal{A}_k. \end{cases} \tag{2.3}$$

Les deux premières relations dans (2.3) permettent de définir un module d'homologie gradué

$$H_*(\mathcal{A}) := \sum_k H_k(\mathcal{A}).$$

La troisième relation de (2.3) permet de définir dans $H_*(\mathcal{A})$ une multiplication associative. Le produit de deux éléments, l'un de $H_k(\mathcal{A})$ et l'autre de $H_h(\mathcal{A})$ est un élément de $H_{k+h}(\mathcal{A})$. $H_*(\mathcal{A})$ est donc une $A$-algèbre graduée, dont l'élément unité est l'image de l'élément unité dans $A$.

**Définition 2.2.5** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre différentielle graduée ( DG-algèbre ). On appelle augmentation une application A-linéaire $\varepsilon : \mathcal{A} \to A$ telle que*

$$\begin{cases} \varepsilon(1) = 1 & ; \\ \varepsilon(xy) = (\varepsilon x)(\varepsilon y) & \forall x, y; \\ \varepsilon x = 0 & \forall x \in \mathcal{A}_k \quad et \quad k \geq 1; \\ \varepsilon d = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

### 2.2.2 Les DG-Catégories

**Définition 2.2.6** *Soit $B$ un anneau commutatif. Une dg-catégorie $\mathcal{P}$ sur $B$ est donnée par :*

*i) $ob(\mathcal{P})$ est un ensemble.*

*ii) $\forall E, F \in ob(\mathcal{P})$, on a un complexe de $B$-modules $\mathcal{P}^{\cdot}(E,F)$ tel que*

$$(\mathcal{P}^{\cdot}(E,F), d) = \{(\mathcal{P}^i(E,F), d^i), \quad d^i : \mathcal{P}^i(E,F) \to \mathcal{P}^{i+1}(E,F)\}.$$

*autrement dit :*

$$(\mathcal{P}^{\cdot}(E,F), d) = \quad ... \to \mathcal{P}^{i-1}(E,F) \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{P}^i(E,F) \xrightarrow{d^i} \mathcal{P}^{i+1}(E,F) \to ...$$

*iii) $1 \in \mathcal{P}^0(E,F)$ et $d(1) = 0$.*

*iv) $\forall \alpha \in \mathcal{P}^i(E,F)$, $\forall \beta \in \mathcal{P}^j(F,G)$ un élément $\beta.\alpha \in \mathcal{P}^{i+j}(E,G)$ vérifiant :*

- *L'application $\alpha, \beta \mapsto \beta.\alpha$ est $B$-bilinéaire.*
- *$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{P}^i(E,F), \beta \in \mathcal{P}^j(F,G), \gamma \in \mathcal{P}^k(G,H)$ .*
- *$d(\beta\alpha) = d(\beta)\alpha + (-1)^{|\beta|}\beta d(\alpha)$.*

Soient $\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)$, $\mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z)$ et $\mathcal{P}^{\cdot}(X,Z)$ trois complexes, on définit un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z) \otimes \mathcal{P}^{\cdot}(X,Y) & \to & \mathcal{P}^{\cdot}(X,Z) \\ \sum \beta_i \otimes \alpha_i & \mapsto & \sum \beta_i \alpha_i \end{array}$$

où le complexe $\mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z) \otimes \mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)$ est défini par :

$$(\mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z) \otimes \mathcal{P}^{\cdot}(X,Y))^i = \bigoplus_j \mathcal{P}^j(Y,Z) \otimes \mathcal{P}^{i-j}(X,Y), \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

avec les différentielles

$$d(\beta \otimes \alpha) := d(\beta) \otimes \alpha + (-1)^{|\beta|} \beta \otimes d(\alpha)$$

### 2.2.3 La construction Dold-Puppe

On reprendra la discussion dans [ILLU] et [SIMP2]. On va construire un complexe $D(n)$ pour tout $n \in \Delta$. On note par $D(n)^{-k}$ le groupe abélien libre engendré par les inclusions $\varphi : [k] \to [n], \quad \forall 0 \leq k \leq n$ et $D(n)^{-k} = 0$ sinon.

**Définition 2.2.7** *On définit la différentielle $d : D(n)^{-k} \to D(n)^{1-k}$ par*

$$d\varphi := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\varphi \circ \partial_i)$$

*où $\partial_i : [k-1] \to [k]$ est l'application face qui saute les $i^{\text{ème}}$ objets.*

**Définition 2.2.8** *On définit le coprduit*

$$\mathcal{K} : D(n) \to D(n) \otimes D(n)$$

*comme suivant : Soit* $lt_i : [i] \to [k]$ *l'inclusion des* $i+1$ *premiers objets et* $gt_i : [k-i] \to [k]$ *l'inclusion des* $k+1-i$ *derniers objets. Pour toute inclusion* $\varphi : [k] \to [n]$ *on donne*

$$\mathcal{K}(\varphi) := \sum_{i=0}^{k} (\varphi \circ lt_i) \otimes (\varphi \circ gt_i).$$

Le produit $\mathcal{K}$ est co-associatif et compatible avec la différentielle $d$.

La collection des complexes $D(n)$ forme un objet co-simplicial dans la catégorie des complexes. Pour toute application $\psi : [n] \to [m]$ on peut avoir la composition

$$\begin{array}{ccc} D(n) & \to & D(m) \\ \varphi & \mapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

si $\psi$ est injectif, et zéro sinon.

On peut maintenant donner la définition du foncteur Dold-Puppe :

**Définition 2.2.9** *Soit* $A$ *un complexe, l'application du foncteur Dold-Puppe sur le complexe* $A$ *est donnée pour tout* $n$ *par*

$$DP(A)_n := Hom(D(n), A)$$

*où* $Hom(D(n), A)$ *est le groupe des morphismes de complexes de* $D(n)$ *vers* $A$.

C'est un objet simplicial par fonctorialité de $D(n)$ en $n$ [SIMP2].

Un élément $\alpha \in DP(A)_n$ peut être consédéré comme une collection des $\alpha(\varphi) \in A^{-k}$ pour toute inclusion $\varphi : [k] \in [n]$ satisfaisant :

$$d(\alpha(\varphi)) = \sum (-1)^j \alpha(\varphi \circ \partial_j).$$

Si on note l'inclusion $\varphi$ par $(i_0, \cdots, i_k)$ où $i_j = \varphi(j) \in [n]$, alors l'élément $\alpha$ consiste en des données notées $\alpha(i_0, \cdots, i_k) \in A^{-k}$ qui satisfont à l'identité

$$d(\alpha(i_0, \cdots, i_k)) = \sum (-1)^j \alpha(i_0, \cdots, \hat{i_j}, \cdots, i_k).$$

On pourra rapprocher cette formule à celle pour le nerf cohérent ci-après.

Plus théoriquement : Soit Norm le normalisateur du foncteur des complexes des groupes abéliens simplicials vers les complexes gradués non positifs des groupes abéliens. Si on note par $dgn$ les sous complexes dégénérés, alors :

$$\mathrm{Norm}(A) = s(A)/dgn(A).$$

La DP-construction restreinte aux complexes gradués négativements est l'inverse de Norm.

**Définition 2.2.10** *Si on compose*

$$Hom(D(n), A) \times Hom(D(n), B) \to Hom(D(n) \otimes D(n), A \otimes B)$$

*avec l'application des compositions à droite avec le co-produit $\mathcal{K}$, on obtient*

$$Hom(D(n), A) \times Hom(D(n), B) \to Hom(D(n), A \otimes B).$$

*On obtient ainsi l'application entre les ensembles simpliciaux*

$$DP(A) \times DP(B) \to DP(A \otimes B)$$

*qui n'est pas linéaire.*

Ce produit est associatif (à cause de la co-associativitée de $\mathcal{K}$). On remarque que si on note par $\mathbb{Z}[0]$ le complexe avec $\mathbb{Z}$ en degré 0 alors $DP(\mathbb{Z}[0])$ est le groupe simplicial abélien constant en $\mathbb{Z}$.

Si $R$ est un anneau de base commutatif, $A$ et $B$ deux complexes de $R$-modules, alors on a une application

$$A \otimes B \to A \otimes_R B.$$

Le produit

$$DP(A) \times DP(B) \to DP(A \otimes_R B)$$

va être aussi associatif et unitaire. Ça nous permettra, on utilisant le $DP$, de construire des catégories simpliciales à partir des dg-catégories.

On pourra expliciter le produit : Soient $\alpha \in DP(A)_n$ et $\beta \in DP(B)_n$. On obtiendra le produit $\alpha \otimes \beta \in DP(A \otimes B)_n$ donné par la formule

$$(\alpha \otimes \beta)(i_0, \cdots, i_k) := \sum_{j=0}^{k} \alpha(i_0, \cdots, i_j) \otimes \beta(i_j, \cdots, i_k).$$

Il est facile de voir l'associativité

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma).$$

Une dg-catégorie sur un anneau $R$ est une catégorie $\mathcal{C}$ enrichie dans les complexes de $R$-modules. Applicons le foncteur $DP$ sur cet enrichissement, avec le produit des applications construit au par avant, on obtient une nouvelle catégorie qu'on notera par $\tilde{DP}(\mathcal{C})$ tel qu'ils ont les mêmes objets (ie : $ob(\tilde{DP}(\mathcal{C})) = ob(\mathcal{C})$), et les morphisme seront définit par :

$$\forall x, y \in ob(\mathcal{C}) : \quad Hom_{\tilde{DP}(\mathcal{C})}(x, y) := DP(Hom_{\mathcal{C}}(x, y))$$

et la composition sera donnée par

$$DP(Hom^{\cdot}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes_R DP(Hom^{\cdot}_{\mathcal{C}}(y, z) \to DP(Hom^{\cdot}_{\mathcal{C}}(x, z)$$

### 2.2.4 Des dg-Catégories vers les $(\infty,1)$-Catégories

**Définition 2.2.11** *Si $\mathcal{P}^{\cdot}$ une dg−catégorie, on définit $\mathcal{P}^{(\infty,1)}$ une catégorie simplicial telle que :*

- $Ob(\mathcal{P}^{\cdot}) = Ob(\mathcal{P}^{(\infty,1)})$
- $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{P}^{(\infty,1)})$ :

$$\mathcal{P}^{(\infty,1)}(X,Y) := DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)) \tag{2.5}$$

où $DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y))$ est l'ensemble simplicial de Dold-Puppe associé au complexe $\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)$ qui est la troncation négative du complexe $\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)$ définie par

$$(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}(X,Y))^i = \begin{cases} \mathcal{P}(X,Y)^i & \text{si} \quad i<0 \\ Z^0 = Ker(d : \mathcal{P}(X,Y)^0 \to \mathcal{P}(X,Y)^1) & \text{si} \quad i=0 \\ 0 & \text{si} \quad i>0 \end{cases}$$

et on peut l'écrire :

$$\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y) = ( \quad ... \to \mathcal{P}(X,Y)^{-i} \to ... \to \mathcal{P}(X,Y)^{-2} \to \mathcal{P}(X,Y)^{-1} \to Z^0 \quad )$$

Les flèches de $\mathcal{P}^{\cdot}$ se composent avec un produit associatif

$$\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{P}) : \quad \mathcal{P}^{(\infty,1)}(Y,Z) \times \mathcal{P}^{(\infty,1)}(X,Y) \to \mathcal{P}^{(\infty,1)}(X,Z) \tag{2.6}$$

A partir du morphisme

$$DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z)) \times DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)) \to DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z) \otimes \tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)) \tag{2.7}$$

et le morphisme

$$\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z) \otimes \tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y) \to \tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Z) \otimes \mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)$$

en composant avec (2.7) on obtient une multiplication comme dans (2.6)

$$\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{P}) : \quad DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(Y,Z)) \times DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Y)) \to DP(\tau_{\leq 0}\mathcal{P}^{\cdot}(X,Z)) \tag{2.8}$$

Ceci est la composition dans $\mathcal{P}^{(\infty,1)}$. La composition est strictement associative par l'associativité du produit $\alpha \otimes \beta$, on obtient ainsi une catégorie simliciale.

## 2.3 Éléments de Maurer-Cartan

**Définition 2.3.1** *Un élément de Maurer-Cartan (M-C) pour $E \in Ob(\mathcal{P})$ est un élément $\eta \in \mathcal{P}^1(E,E)$ vérifiant l'équation de* Courbure *suivante*

$$\delta(\eta) + \eta.\eta = 0 \tag{2.9}$$

*on définit l'ensemble $Ob(MC(\mathcal{P}))$ comme l'ensemble des couples $(E,\eta)$ où $E \in Ob(\mathcal{P})$ et $\eta$ est un élément de Maurer-Cartan. Un tel couple sera appelé MC-objet*

Si $(E, \eta)$ et $(F, \zeta)$ sont deux $MC$-objets, on définit la différentielle

$$d_{\eta,\zeta} : \mathcal{P}^i(E, F) \to \mathcal{P}^{i+1}(E, F)$$

Par $d_{\eta,\zeta}(a) := da + \zeta.a - (-1)^i a.\eta$

**Lemme 2.3.2** *On a $d^2_{\eta,\zeta} = 0$ et si on pose*

$$MC(\mathcal{P})((E, \eta); (F, \zeta)) := (\mathcal{P}^{\cdot}(E, F), d_{\eta,\zeta})$$

*avec la même multiplication et identité que $\mathcal{P}$, on obtient une dg-catégorie $MC(\mathcal{P})$.*

**Preuve :**

On a pour un élément $a$ de degré $i$

$$\begin{aligned} d^2_{\eta,\zeta}(a) &= d(d_{\eta,\zeta}(a)) + \zeta.(d_{\eta,\zeta}(a)) - (-1)^{i+1}(d_{\eta,\zeta}(a)).\eta) \\ &= d^2a + d(\zeta.a) - (-1)^i d(a.\eta) \\ &\quad +\zeta d(a) + \zeta^2.a - (-1)^i \zeta a.\eta \\ &\quad -(-1)^{i+1}(d(a)\eta + \zeta.a\eta - (-1)^i a.\eta^2) \\ &= d(\zeta).a - \zeta d(a) - (-1)^i(d(a).\eta + (-1)^i ad(\eta)) \\ &\quad +\zeta d(a) + \zeta^2.a - (-1)^{i+1}(d(a)\eta - (-1)^i a.\eta^2) \\ &= (d\zeta + \zeta^2).a - a(d\eta + \eta^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait trois éléments de Maure-Cartan $(E, \eta)$, $(F, \zeta)$ et $(G, \rho)$, et $a \in \mathcal{P}^i(F, G)$ et $b \in \mathcal{F}^j(E, F)$ on calcule

$$\begin{aligned} d_{\zeta,\rho}(a).b + (-1)^i a d_{\eta,\zeta}(b) &= d(a)b + \rho.ab - (-1)^i a\zeta b + (-1)^i(adb + a\zeta.b - (-1)^j ab\eta) \\ &= d(ab) + \rho ab - (-1)^{i+j} ab\eta \\ &= d_{\eta,\rho}(ab). \end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. ▲

**Définition 2.3.3** *On définit la catégorie de Maurer-Cartan de $\mathcal{P}$ par la dg-catégorie $MC(\mathcal{P})$ avec*

- $ob(MC(\mathcal{P})) = \{(X, \rho); \quad X \in ob(\mathcal{P}), \quad \rho \in \mathcal{P}^1(X, X)$ *avec* $d(\rho) + \rho^2 = 0\}$
- $MC(\mathcal{P})((X, \rho), (Y, \mu)) := (\mathcal{P}(X, Y); d_{\rho\mu})$ *et* $d_{\rho\mu}(\cdot) = d(*) + * \circ \rho + \mu \circ *$.

On obtient ainsi une catégorie simpliciale $DP(MC(\mathcal{P}))$.

**Remarque 2.3.4** *La construction $MC$ n'est pas invariante sous l'équivalence de la dg-catégorie $\mathcal{P}$.*

## 2.4 Les $n$-champs

Dans [TOEN]

On note par $k - Aff^{\sim, fppf}$ la catégorie de modèles des préfaisceaux simpliciaux sur le site des $k$-schémas affines munie de la topologie **f**idèlement **p**late et de **p**résentation **f**inie. Pour la topologie $fppf$, les équivalences sont les équivalences locales.

**Définition 2.4.1** *On note par $St(k)$ la catégorie homotopique qu'on va appeler la catégorie des champs, les objets seront appelés des champs. On notera par $[-,-]$ les ensembles des morphismes dans $St(k)$.*

*Plus précisément, un $n$-champ $F$ est un champ tel que pour tout $i > n$, tout $X \in k-Aff$ et tout $x \in F(X)$, le faisceau $fppf$ en groupes $\pi_i(F,x)$, associé au préfaisceau*

$$\begin{array}{rccl} \pi^{pr}(F,x): & k - Aff/X & \to & Gp \\ & (f: Y \to X) & \mapsto & \pi_i(F(Y), f^*(x)), \end{array}$$

*est trivial.*

D'aprés [TOVE2], la sous-catégorie pleine de $St(k)$ formée des 0-champs est naturellement équivalente à la catégorie $Sh(k - Aff)$ des faisceaux en ensembles sur $k - Aff$. Le lemme (1.2.8) de Yoneda nous montre qu'avec le plongement

$$k - Aff \to Sh(k - Aff)$$

on peut identifier la catégorie $k - Aff$ avec une sous-catégorie pleine de $St(k)$.

On note par $\mathbb{R}F(A) \in SEns$ la valeur d'un remplacement fibrant de $F \in St(k)$

## 2.5 Construction du $n$-champ des complexes

On a les foncteurs suivants qui associent à un $K$-algèbre $B$ une $(\infty, 1)$-catégorie. Un tel foncteur s'appel $(\infty, 1)$-champs ( ou prè-champs).

- $\mathbf{Perf}^{str} : B \mapsto \mathbf{Perf}^{str}(B)$ la 1-catégorie des complexes strictement parfaits.
- $\mathbf{Perf}^{P}(B) = \mathbf{Perf}^{str}(B)/^{\infty}_{\text{quasi-isomorphisme}}$
- $\mathbf{Perf} = \infty$-champs associé à $\mathbf{Perf}^{P}$

**Remarque 2.5.1** *Les complexes parfaits sont les sections de* ***Perf*** *au lieu de* $\boldsymbol{Perf}^{str}$. *Ce sont des complexes des faisceaux qui sont localement quasi-isomorphes à des complexes strictement parfaits .*

On suppose $V = spec(A)$ donné par le théorème 4.1.4 avec le morphisme

$$\Phi : V \to \mathbf{perf}$$

et on a démontré un enoncé concret essentiellement équivalent à la lissité artinienne de $\Phi$. Pour ça nous allons décomposé cette application comme

$$V \to \mathbf{Perf}^{str} \to \mathbf{Perf}^{P} \to \mathbf{Perf}$$

Supposons ainsi qu'on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
V & \longrightarrow & \mathbf{Perf} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\uparrow & & \mathbf{Perf}^P \\
\uparrow & & \uparrow \\
\uparrow & & \mathbf{Perf}^{str} \\
\uparrow & & \uparrow \\
Spec(B/I) & \longrightarrow & Spec(B)
\end{array}$$

On construira dans le théorème 5.1.1 un relèvement $Spec(B) \to V$ à quasi-isomorphisme près .

Dans l'enoncé 5.1.1, le morphisme $Spec(B) \to \mathbf{Perf}^{str}$ sera un complexe parfait $E$ ; le morphisme $Spec(B/I) \to V$ sera un complexe $D$. La commutativité du diagramme sera représentée par un quasi-isomorphisme $\phi$. Le résultat à chercher sera un complexe $F$. Pour la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
V & & \\
{\scriptstyle D}\uparrow & & \nwarrow {\scriptstyle F} \\
Spec(B/I) & \to & spec(B)
\end{array}$$

on imposera l'égalité

$$F \otimes_B B/I = D.$$

La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
V & \to & \mathbf{Perf} \\
& {\scriptstyle F}\nwarrow & \uparrow {\scriptstyle E} \\
& & spec(B)
\end{array}$$

sera représentée par un quasi-isomorphisme $\psi$. En plus on pourra avoir la compatibilitée

$$\psi \otimes_B B/I = \phi.$$

On reprend la discussion du chapitre 21 de [HISI]. Soit $\mathbf{Perf}^{str}(B)$ la catégorie des complexes strictement parfaits sur $Spec(B)$, et soit $W$ la sous catégorie des quasi-isomorphismes. D'après la théorie du Dwyer-Kan on obtient des $\infty$-catégories $L(Perf^{str}(B))$ qui sont des catégories simpliciales strictes dont les morphismes sont des objets de $W$. Une telle catégorie peut être considéré comme une $(\infty, 1)$-catégories. Donc elle peut être considérée comme une $(n+1)$-catégorie.

Quand $B$ varie, ça nous donne un $(n+1)$-préchap $\mathbf{Perf}^{str}$ au dessus de $Aff_k$.

**Théorème 2.5.2 (Hirschowitz-Simpson [HISI] (proposition 21.2) )** *Le $(n+1)$-préchamp $\mathbf{Perf}^{str}$ est un $(n+1)$-champ.*

Soit $\mathbf{Perf}^p$ qui associe à chaque $B$ son image $\mathbf{Perf}^{str}(B)|^{\infty}_{q.i}$ la catégorie des complexes. Autrement dit

$$\mathbf{Perf}^p : B \mapsto \mathbf{Perf}^{str}(B)|^{\infty}_{q.i}$$

**Définition 2.5.3** *On définit un nouveau $(n+1)$-préchamp $L(\mathbf{Perf}^p(B))$ en posant :*

$$L(\mathbf{Perf}^p)(B) := L(\mathbf{Perf}^p(B)).$$

*Ce $(n+1)$-préchamp vient avec un morphisme*

$$L(\mathbf{Perf}^p) \to \mathbf{Perf} := L(\mathbf{Perf}^{str})$$

# Chapitre 3

# Catégories monoïdales et la bar-cobar construction

## 3.1 Catégories monoïdales

**Définition 3.1.1** *Une catégorie monoïdale est une catégorie $\mathcal{C}$ munie :*
- *d'un bifoncteur $\bigotimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ appelé produit tensoriel.*
- *d'un objet $I \in ob(\mathcal{C})$ appelé objet unité.*
- *d'une transformation naturelle $\alpha$ appelé associateur .*
  *telles que l'application*

$$\forall A, B, C \in ob(\mathcal{C}; \quad \alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$$

  *est un isomorphisme.*
  *On dit que $\alpha$ est un isomorphisme naturel du foncteur $(- \otimes -) \otimes -$ vers le foncteur $- \otimes (- \otimes -)$*
- *De deux transformations naturelles $\lambda$ et $\rho$ telles que pour tout $A \in ob(\mathcal{C})$ , $\lambda$ et $\rho$ induisent des isomorphismes :*

$$\lambda_A : I \otimes A \to A \qquad et \qquad \rho_A : A \otimes I \to A$$

  *vérifiant les conditions de cohérence comme le montre les deux diagrammes commutatifs suivants :*

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "A\otimes\alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

*et*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "A \otimes \lambda_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

**Définition 3.1.2** *On appel foncteur monoïdale, tout foncteur entre deux catégories monoïdales qui préserve la structure monoïdale.*

**Définition 3.1.3** *On dit qu'une catégorie monoïdale est symétrique si elle possède des isomorphismes*

$$\tau_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

*naturels en $A$ et $B$ tels que*

$$\tau_{A,B} \circ \tau_{B,A} = id_{B \otimes A}, \quad \rho_B = \lambda_B \circ \tau_{B,I},$$

*et tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "\tau_{A,B} \otimes C"'] & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\tau_{A,B \otimes C}"] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[d, "\alpha_{B,C,A}"] \\
(B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{B,A,C}"'] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[r, "B \otimes \tau_{A,C}"'] & B \otimes (C \otimes A)
\end{tikzcd}$$

**Théorème 3.1.4 (Théorème de cohérence de Mac-Lane)** *Toute catégorie monoïdale est équivalente à une catégorie monoïdale stricte par une relation déquivalence entre catégories monoïdales.*

Ce théorème nous donne la possibilitée de se passer des isomorphismes $\alpha, \lambda$ et $\rho$ pour travailler uniquement avec des catégories monoïdales strictes.

**Corollaire 3.1.5** *Tout diagramme construit avec les isomorphismes $\alpha, \lambda$ et $\rho$, les identités et le produit tensoriel est commutatif.*

## 3.2 La catégorie des foncteurs faibles

Le but de cette section est de construire une dg-catégorie des foncteurs faibles, qu'on notera par $\mathcal{FF}(A, B)$. On notera ainsi une dg-catégorie des semi-foncteurs faibles par ${}^s\mathcal{FF}(A, B)$ et la dg-catégorie pleine des foncteurs faibles strictement unitaires par $\mathcal{FF}^{su}(A, B)$.

Les objets de ces deux catégories seront bien définis dans les définitions (3.2.1) et (3.2.2), et on donnera ensuite les morphismes dans la définition (3.2.3).

**Définition 3.2.1** *Soient $A$ et $B$ deux dg-catégories. On va définir, ici et en (3.2.3), la dg-catégorie des semi-foncteurs faibles ${}^s\mathcal{FF}(A,B)$. Les objets de cette catégorie sont les semi-foncteurs faibles $\mathcal{F} : A \to B$ comprenant $\mathcal{F} : ob(A) \to ob(B)$ et pour toute suite*

$$\{X_0 \xleftarrow{a_1} X_1 \xleftarrow{a_2} ... \xleftarrow{a_{n-1}} X_{n-1} \xleftarrow{a_n} X_n\}_{\ X_i \in ob(A),\ a_i \in A^{k_i}(X_i, X_{i-1}),\ i \in \{1,...,n\}} .$$

*Le foncteur bar $\mathcal{F}$ appliqué sur les $a_i$ définit par*

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}(a_1|...|a_n)) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_i+i-1}\mathcal{F}(a_1|...|da_i|...|a_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\mathcal{F}(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\tau_i+i-1}\mathcal{F}(a_1|\cdots|a_i)\mathcal{F}(a_{i+1}|\cdots|a_n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

*avec $\tau_i = \sum_{k=1}^{i-1}$ degré$(a_k)$ et tel que :*

$$\mathcal{F}(a_1|...|a_n) \in B^k(X_0, X_n), \qquad k = \sum_{i=1}^{n} k_i + 1 - n.$$

**Définition 3.2.2** *Si de plus, un objet $\mathcal{F}$ de ${}^s\mathcal{FF}(A,B)$ satisfait la condition :*

1. *$\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ dans $H^0(B(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_X))$, alors on dira que $\mathcal{F}$ est un foncteur faible, et on notera par $\mathcal{FF}(A,B) \subset {}^s\mathcal{FF}(A,B)$ la sous-dg-catégorie pleine des foncteurs faibles.*

   *Si $\mathcal{F}$ satisfait aux conditions plus fortes*
2. *$\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ dans $B(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_X)$, et*
3. *$\mathcal{F}(a_1|\cdots|a_i|1|a_{i+2}|\cdots|a_n) = 0$ dans $B$.*

*Alors on dira que $\mathcal{F}$ est* strictement unitaire *('su') et on notera par*

$$\mathcal{FF}^{su}(A,B) \subset \mathcal{FF}(A,B)$$

*la sous-dg-catégorie pleine des foncteurs faibles strictement unitaires.*

**Définition 3.2.3** *Pour tout objets $F, G \in ob(\mathcal{FF}(A,B))$ , $\mathcal{FF}(A,B)(F,G)$ est le complexe vérifiant :*

*Un élément $\eta \in \mathcal{FF}(A,B)(F,G)^k$ sera la donnée pour chaque $n \geq 0$ , pour toute suites $X_0, X_1, ..., X_n \in ob(A)$ et pour toute famille de flèches $\{a_i \in A^{k_i}(X_i, X_{i-1})\}_{i\in\{1,\cdots,n\}}$, de*

$$\begin{cases} \eta(a_1|...|a_n) \in B^l(\mathcal{F}(X_n), \mathcal{F}(X_0)) & l = \sum_{i=1}^{n} k_i + 1 - n \\ \text{et pour } n = 0 : \quad \eta_{X_0} \quad \text{est une} & \text{transformation naturelle} \end{cases}$$

*où $\eta$ est une application multi-linéaire :*

$$\eta : A^{k_1}(X_1, X_0) \otimes ... \otimes A^{k_n}(X_n, X_{n-1}) \to B^l(\mathcal{F}(X_n), \mathcal{F}(X_0)).$$

*On définit la différentielle $d$ de ce complexe*

$$d_{FG}(\eta) \in \mathcal{F}\mathcal{F}(A, B)^{k+1}(F, G)$$

*par*

$$\begin{aligned} d_{FG}(\eta)(a_1|...|a_n) &= d(\eta(a_1|...|a_n)) \\ &+(-1)^k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_i+i-1} \eta(a_1|...|da_{i+1}|...|a_n) \\ &+(-1)^k \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\tau_{i+1}+i-1} \eta(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k(\tau_i+i-1)} F(a_1|...|a_i)\eta(a_{i+1}|...|a_n) \\ &+(-1)^k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_i+i-1} \eta(a_1|...|a_i) G(a_{i+1}|...|a_n) \end{aligned} \tag{3.2}$$

*avec* $\tau_i = \sum_{k=1}^{i-1}$ *degré*$(a_k)$.

**Définition 3.2.4** *On définit la composition dans la dg-catégorie des foncteurs faibles par*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{F}(A, B)(G, H) \otimes \mathcal{F}\mathcal{F}(A, B)(F, G) &\to \mathcal{F}\mathcal{F}(A, B)(F, H) \\ (\eta \otimes \varphi) &\mapsto (\eta \circ \varphi)(a_1|...|a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(a_1|...|a_i)\eta(a_{i+1}|...|a_n). \end{aligned}$$

Notre objectif est de démontrer le lemme suivant dans $\mathcal{F}\mathcal{F}(A, B)$.

**Lemme 3.2.5** *1. La différentielle $d$ définit dans (3.2) vérifie :*

$$d^2(\eta) = 0.$$

*2. La différentielle de la composition sera donnée par*

$$d(\eta \circ \varphi) = d(\eta)\varphi + (-1)^{|\eta|}\eta d(\varphi).$$

**Une version plus simple**

Avant de faire la démonstration du lemme dans $\mathcal{FF}(A,B)$, on construit une sous-catégorie $\mathfrak{M}(A,B)$ comme suit :

**Définition 3.2.6** *On définit la catégories des flèches, comme une sous-catégorie de celle des foncteurs faibles, et on la note par $\mathfrak{M}(A,B)$. Cette catégorie sera définie pour toutes dg-catégories $A$ et $B$ par :*
- $ob(\mathfrak{M}(A,B)) = \{\varphi : ob(A) \to ob(B)\}$.
- $\forall k, \quad \forall \varphi, \psi \in ob(\mathfrak{M}(A,B))$ :
  $\mathfrak{M}(A,B)(\varphi,\psi)^k = \{f(a_1,\cdots,a_n) \in B^{\varphi(X_0),\psi(X_n)}, \quad \forall X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n\}$.

*Le complexe de tous les flèches dans $\mathfrak{M}(A,B)$ sera noté par*

$$\mathfrak{M}(A,B)(\varphi,\psi) := \Pi_k Hom(A^{X_1,X_0} \otimes ... \otimes A^{X_n,X_{n-1}}, B^{\varphi X_n,\psi X_0}).$$

**Définition 3.2.7** *Vu que $\mathfrak{M}(A,B)$ est définit comme une sous-catégorie de $\mathcal{FF}(A,B)$ telle que $\mathcal{F}(a_1,...,a_n) = 0$, alors la différentielle sur la catégorie $\mathfrak{M}(A,B)$ sera donnée pour tout $f \in \mathfrak{M}(A,B)^k(\varphi,\psi)$ par*

$$\begin{aligned} d(f)(a_1|...|a_n) &= d(f(a_1|...|a_n)) \\ &+(-1)^k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_i+i-1} f(a_1|...|da_i|...|a_n) \\ &+(-1)^k \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\tau_{i+1}+i-1} f(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n). \end{aligned} \tag{3.3}$$

On rappel ici que $\tau_i = \sum_{k=1}^{i-1} |a_k|$. On cherche maintenant à définir la composition dans $\mathfrak{M}(A,B)$.

**Définition 3.2.8** *soient $f \in \mathfrak{M}(A,B)(\varphi,\psi)$ et $g \in \mathfrak{M}(A,B)(\psi,\omega)$, la composition*

$$\begin{aligned} \circ_{\mathfrak{M}(A,B)} : \mathfrak{M}(A,B)(\psi,\omega) \otimes \mathfrak{M}(A,B)(\varphi,\psi) &\to \mathfrak{M}(A,B)(\varphi,\omega) \\ (g \otimes f) &\mapsto g \circ f : \varphi \xrightarrow{f} \psi \xrightarrow{g} \omega \end{aligned}$$

*est donnée par*

$$(g \circ f)(a_1|\cdots|a_n) := \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{|f|(\tau_i+i-1)} g(a_1|\cdots|a_i) f(a_{i+1}|\cdots|a_n).$$

On formule la même propriété que le lemme (3.2.5) pour $\mathfrak{M}(A,B)$, car la démonstration sera plus simple dans ce cas, et conduira au lemme (3.2.5) par le formalisme des catégories $\mathcal{MC}$ des éléments de Maurer-Cartan (voir [BENZ13]).

**Lemme 3.2.9** *1. La différentielle $d$ définit dans (3.3) vérifie :*

$$d^2(f) = 0.$$

*2. La différentielle de la composition sera donnée par*

$$d(g \circ f) = d(g) \circ f + (-1)^{|g|} g \circ d(f).$$

**Preuve**

On démontre le lemme (3.2.9) :

1. D'après la définition (3.2.7) de la différentielle $d$ sur la catégorie $\mathfrak{M}(A, B)$ mentionnée dans (3.3), on a :

$$\begin{aligned} d(f)(a_1|...|a_n) &= d(f(a_1|...|a_n)) \\ &+(-1)^k \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1} f(a_1|...|da_i|...|a_n) \\ &+(-1)^k \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1} f(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n). \end{aligned}$$

Posons $g = d(f)$.
Pour tout $g \in \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi)^{k+1}$ on a $d(g) \in \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi)^{k-1}$ , donc

$$d^2(f) = d(d(f)) = d(g) \tag{3.4}$$

et on appliquant (3.4) dans la même formule (3.3), on trouve

$$\begin{aligned} d(g)(a_1|...|a_n) &= d(g(a_1|...|a_n)) \qquad (3.5) \\ &+(-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1} g(a_1|...|da_i|...|a_n) \\ &+(-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1} g(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} d(d(f))(a_1|...|a_n) &= d(d(f)(a_1|...|a_n)) \qquad (3.6) \\ &+(-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1} d(f)(a_1|...|da_i|...|a_n) \qquad (3.7) \\ &+(-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1} d(f)(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n) \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Le terme $d(d(f))(a_1|...|a_n)$ est la somme de trois termes (3.6), (3.7) et (3.8).
On note par

$$\begin{aligned} A &:= d(d(f))(a_1|...|a_n), \\ A_1 &:= d(d(f)(a_1|...|a_n)), \\ A_2 &:= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1} d(f)(a_1|...|da_i|...|a_n), \\ A_3 &:= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1} d(f)(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n), \end{aligned}$$

de sorte que

$$d(d(f))(a_1|...|a_n) = A = A_1 + (-1)^{k+1}A_2 + (-1)^{k+1}A_3.$$

On va développer et simplifier chaque terme comme suit :
On appliquant la définition (3.2.7) de la différentielle $d$ sur les trois termes, on obtient

$$\begin{aligned} A_1 &= d\Big(df(a_1|...|a_n)\Big) && (3.9)\\ &+(-1)^k d\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}f(a_1|...|da_i|...|a_n)\Big) && (3.10)\\ &+(-1)^k d\Big(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_n)\Big). && (3.11)\end{aligned}$$

On remarque dans (3.9) la présence d'un terme $d(df(a_1|...|a_n)) = 0$ car $d^2 = 0$.
On sait que la différentielle d'une somme est égale à la somme des différentielles, donc on appliquant ça sur les termes (3.10) et (3.11), on trouve :

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^k\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}d(f(a_1|...|da_i|...|a_n)) && (3.12)\\ &+(-1)^k\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}df(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_n). && (3.13)\end{aligned}$$

Le terme (3.7) noté par $A_2$ donne

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(df(a_1|...|da_i|...|a_n) && (3.14)\\ &+(-1)^k\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\tau'_{ij}+i+j-2}f(a_1|...|da_j|\leftrightarrow|da_i|...|a_n) && (3.15)\\ &+(-1)^k\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{\tau''_{ij}+i+j-2}f(a_1|...|a_ja_{j+1}|\leftrightarrow|da_i|...|a_n)\Big). && (3.16)\end{aligned}$$

La notation $f(a_1|...|da_{j+1}|\leftrightarrow|da_{i+1}|...|a_n)$ signifie que les termes $da_{j+1}$ et $da_{i+1}$ sont quelque part mais sans spécifier dans quel ordre ; et qu'il y a aussi le terme avec $|d(da_{i+1})|$. Dans (3.16) il y a aussi les termes avec $|a_ida_{i+1}|$ et $|(da_{i+1})a_{i+2}|$. D'autre part, les degrés $\tau'_{ij}$ , $\tau''_{ij}$ sont définies de la même façon que $\tau_j$ mais tenant compte du terme $da_{i+1}$ à sa place.
On peut écrire $A_2$ comme somme des trois termes $A_2^1$, $A_2^2$ et $A_2^3$ ce qui donne

$$A_2 := A_2^1 + (-1)^kA_2^2 + (-1)^kA_2^3$$

tels que

$$\begin{aligned}
A_2^1 &:= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(df(a_1|...|da_{i+1}|...|a_n)\Big),\\
A_2^2 &:= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i'+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\tau_j'+j-1}f(a_1|...|da_j|\leftrightarrow|da_i|...|a_n)\Big),\\
A_2^3 &:= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i'+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{\tau_j+j-1}f(a_1|...|a_ja_{j+1}|\leftrightarrow|da_i|...|a_n)\Big).
\end{aligned}$$

La somme de $(-1)^{k+1}A_2^1$ avec le premier terme de $A_1$ vaut 0.
Dans le terme (3.15) noté par $A_2^2$, on remarque l'existence de deux dérivées $da_i$ à cause de la première dérivation, et $da_j$ qui vient de la deuxième, ordonnées de la manière suivante :

$$\begin{cases}
\text{si } j<i & \text{alors c'est} \quad f(a_1|...|da_j|...|da_i|...|a_n),\\
\text{si } j=i & \text{alors c'est} \quad f(a_1|...|d^2a_i|...|a_n),\\
\text{si } j>i & \text{alors c'est} \quad f(a_1|...|da_i|...|da_j|...|a_n).
\end{cases}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$A_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{\tau_j+j-1}f(a_1|...|da_j|...|da_i|...|a_n)\Big) \tag{3.17}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big((-1)^{\tau_i+i-1}f(a_1|...|d^2a_i|...|a_n)\Big) \tag{3.18}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{\tau_j+j}f(a_1|...|da_i|...|da_j|...|a_n)\Big). \tag{3.19}$$

Le terme $A_2^2=0$ car dans (3.18) il y a $d^2=0$ donc tout le terme est nul, et les termes (3.17) et (3.19) sont les mêmes avec signes différents, donc leurs somme est nulle.
Dans le terme (3.16) noté par $A_2^3$, on remarque l'existence de $da_i$ à cause de la première dérivation, et $a_ja_{j+1}$ qui vient de la deuxième, ordonnées de la manière suivante :

$$\begin{cases}
\text{si } j<i-1 & \text{alors c'est} \quad f(a_1|...|a_ja_{j+1}|...|da_i|...|a_n),\\
\text{si } j=i-1 & \text{alors c'est} \quad f(a_1|...|a_{i-1}d(a_i)|...|a_n),\\
\text{si } j=i & \text{alors c'est} \quad (-1)^i f(a_1|...|d(a_i)a_{i+1}|...|a_n),\\
\text{si } j>i & \text{alors c'est} \quad f(a_1|...|d(a_i)|...|a_ja_{j+1}|...|a_n).
\end{cases}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
A_2^3 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{i-2}(-1)^{\tau_{j+1}+j-1}f(a_1|...|a_ja_{j+1}|...|da_i|...|a_n)\Big) && (3.20)\\
&+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big((-1)^{\tau_i+i}f(a_1|...|a_{i-1}da_i|...|a_n)\Big) && (3.21)\\
&+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big((-1)^{\tau_{i+1}+i}f(a_1|...|d(a_i)a_{i+1}|...|a_n)\Big) && (3.22)\\
&- \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=i+2}^{n-2}(-1)^{\tau_{j+1}+j}f(a_1|...|da_i|...|a_ja_{j+1}|...|a_n)\Big). && (3.23)
\end{aligned}$$

Le terme (3.8) noté par $A_3$ donne

$$\begin{aligned}
A_3 &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(df(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_n) && (3.24)\\
&\quad +(-1)^k\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{\tau_j+j}f(a_1|...|da_{j+1}|...|a_n) && (3.25)\\
&\quad +(-1)^k\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{j}f(a_1|...|a_ja_{j+1}|...|a_n)\Big). && (3.26)
\end{aligned}$$

On peut écrire $A_3$ aussi comme somme des trois termes $A_3^1$, $A_3^2$ et $A_3^3$ ce qui donne

$$A_3 := A_3^1 + (-1)^k A_3^2 + (-1)^k A_3^3$$

tels que

$$\begin{aligned}
A_3^1 &:= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(df(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_n)\Big),\\
A_3^2 &:= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\tau_j+j-1}f(a_1|...|a_ia_{i+1}|\leftrightarrow|da_j|...|a_n)\Big),\\
A_3^3 &:= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{\tau'_{j+1}+j-1}f(a_1|...|a_ia_{i+1}|\leftrightarrow|a_ja_{j+1}|...|a_n)\Big).
\end{aligned}$$

Le terme $(-1)^{k+1}A_3^1$ s'annule avec le terme restant de $A_1$.
Dans le terme (3.25) noté par $A_3^2$, on remarque l'existence de la composition $a_ia_{i+1}$ à cause de la première dérivation, et de la dérivée $da_j$ à cause de la deuxième, ordonnées

de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } j > i+1 & \text{alors on a} & f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|da_j|...|a_n), \\ & \text{ ce terme correspond à l'indice} & \text{j-1} \\ \text{si } j = i, i+1 & \text{alors c'est} & f(a_1|...|d(a_i)a_{i+1} + (-1)^{|a_i|}a_id(a_{i+1})|...|a_n), \\ \text{si } j < i & \text{alors c'est} & f(a_1|...|da_j|...|a_ia_{i+1}|...|a_n). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} A_3^2 &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{\tau_j+j-1}f(a_1|...|da_j|...|a_ia_{i+1}|...|a_n)\Big) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big((-1)^{\tau_i+i-1}f(a_1|...|d(a_i)a_{i+1} + (-1)^{|a_i|}a_id(a_{i+1})|...|a_n)\Big) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=i+2}^{n}(-1)^{\tau_j+(j-1)-1}f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|da_j|...|a_n)\Big). \end{aligned}$$

Ce terme s'annule avec $A_2^3$.
Dans le dernier terme (3.26) noté par $A_3^3$, on remarque l'existence de deux compositions $a_ia_{i+1}$ à cause de la première dérivation, et $a_ja_{j+1}$ qui vient de la deuxième, ordonnées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } j < i-1 & \text{alors c'est} & f(a_1|...|a_ja_{j+1}|...|a_ia_{i+1}|...|a_n), \\ \text{si } j = i-1 & \text{alors c'est} & f(a_1|...|a_{i-1}a_ia_{i+1}|...|a_n), \\ \text{si } j = i & \text{alors c'est} & (-1)^if(a_1|...|a_ia_{j+1}a_{i+2}|...|a_n), \\ \text{si } j > i & \text{alors c'est} & f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_ja_{j+1}|...|a_n). \end{cases}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_3^3 &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{\tau_{j+1}+j-1}f(a_1|...|a_ja_{j+1}|...|a_ia_{i+1}|...|a_n)\Big) && (3.27) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big((-1)^{\tau_i+i}f(a_1|...|a_{i-1}a_ia_{i+1}|...|a_n)\Big) && (3.28) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big((-1)^{\tau_{i+1}+i-1}f(a_1|...|a_ia_{i+1}a_{i+2}|...|a_n)\Big) && (3.29) \\ &- \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=i+2}^{n-2}(-1)^{\tau_{j+1}+j}f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_ja_{j+1}|...|a_n)\Big). && (3.30) \end{aligned}$$

On remarque que les termes (3.28) et (3.29) sont opposés l'un à l'autre. Les termes (3.27) et (3.30) sont opposés donc leurs sommes est 0. Finalement on a bien $d^2(f) = 0$.

2. On montre maintenant que

$$d(g\circ f)=d(g)f+(-1)^{|g|}gd(f)$$

pour $\varphi\xrightarrow{f}\psi\xrightarrow{g}\omega$ avec $f\in\mathfrak{M}(A,B)^k(\varphi,\psi)$ et $g\in\mathfrak{M}(A,B)^l(\psi,\omega)$.
On a

$$\begin{aligned} d(g\circ f)(a_1|...|a_n) &= d(g\circ f(a_1|...|a_n)) \\ &+(-1)^{k+l}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}g\circ f(a_1|...|da_i|...|a_n) \\ &+(-1)^{k+l}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}g\circ f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_n) \end{aligned}$$

On note par $B_1$, $B_2$ et $B_3$, les trois termes de cette égalité de sorte que

$$d(g\circ f)(a_1|...|a_n)=B=B_1+(-1)^{k+l}B_2+(-1)^{k+l}B_3$$

et

$$\begin{aligned} B_1 &= d(g\circ f(a_1|...|a_n)) \\ B_2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}g\circ f(a_1|...|da_i|...|a_n) \\ B_3 &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}g\circ f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_n) \end{aligned}$$

Comme

$$g\circ f(a_1|...|a_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k(\tau_i+i-1)}g(a_1,\cdots,a_i)f(a_{i+1},\cdots,a_n)$$

alors

$$\begin{aligned}
B_1 &= d(g \circ f(a_1|...|a_n)) \\
&= d\Big(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_i+i-1)}g(a_1|\cdots|a_i)f(a_{i+1}|\cdots|a_n)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_i+i-1)}\Big(d(g(a_1|\cdots|a_i))f(a_{i+1}|\cdots|a_n) \\
&\quad +(-1)^{l+\tau_i+1-i}g(a_1|\cdots|a_i)d(f(a_{i+1}|\cdots|a_n))\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_i+i-1)}\Big(d(g(a_1|\cdots|a_i))f(a_{i+1}|\cdots|a_n)\Big) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{l+(k+1)(\tau_i+i-1)}\Big(g(a_1|\cdots|a_i)d(f(a_{i+1}|\cdots|a_n))\Big)
\end{aligned}$$

De la même manière, on calcule $B_2$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(g \circ f(a_1|...|da_i|...|a_n)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_j+j-1)}g(a_1|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n)\Big)
\end{aligned}$$

Dans $B_2$, et pour tout $i$ fixé, le terme $da_{i+1}$ est présent avant $a_j$ pour $j < i+1$ donc dans $g$ et après $a_{j+1}$ sinon, donc dans $f$ . Ça nous permet d'écrire $B_2$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
B_2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_j+j)}g(a_1|...|da_i|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n)\Big) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_j+j-1)}g(a_1|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|...|da_i|\cdots|a_n)\Big).
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
B_3 &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}g \circ f(a_1|...|a_ia_{i+1}|...|a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-2}g(a_1|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n)\Big)
\end{aligned}$$

Dans $B_3$, et pour tout $i$ fixé, le terme $a_i a_{i+1}$ est présent avant $a_j$ pour $j < i+1$ donc dans $g$ et après $a_{j+1}$ sinon, donc dans $f$ . Ça nous permet d'écrire $B_2$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_3 &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{k(\tau_j+j)}g(a_1|...|a_i a_{i+1}|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n)\Big) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{k(\tau_j+j-1)}g(a_1|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|...|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n)\Big) \end{aligned}$$

On remarque qu'il y a deux termes dans $B_1, B_2$ et $B_3$, l'un avec des applications sur $g$ et l'autre sur $f$. On rassemblant les termes qui dépends de $g$ ensemble, et ceux dépendant de $f$ ensemble, on trouve

$$\begin{aligned} B &= B_1 + (-1)^{k+l}B_2 + (-1)^{k+l}B_3 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_i+i-1)}\Big(d(g(a_1|\cdots|a_i))f(a_{i+1}|\cdots|a_n)\Big) \\ &\quad +(-1)^{k+l}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_j+j)}g(a_1|...|da_i|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n)\Big) \\ &\quad +(-1)^{k+l}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{k(\tau_j+j)}g(a_1|...|a_i a_{i+1}|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n)\Big) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{l+(k+1)(\tau_i+i-1)}\Big(g(a_1|\cdots|a_i)d(f(a_{i+1}|\cdots|a_n))\Big) \\ &\quad +(-1)^{k+l}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\tau_i+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{k(\tau_j+j-1)}g(a_1|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|...|da_i|\cdots|a_n)\Big) \\ &\quad +(-1)^{k+l}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{k(\tau_j+j-1)}g(a_1|\cdots|a_j)f(a_{j+1}|...|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n)\Big). \end{aligned}$$

La somme des trois premiers termes vaut $d(g)f(a_1|\cdots|a_n)$, en effet :

$$\begin{aligned} d(g)f(a_1|\cdots|a_n) &= \sum(-1)^{k(\tau_j+j-1)}d(g(a_1|\cdots|a_j))f(a_{j+1}|\cdots|a_n) \\ &= \sum(-1)^{k(\tau_j+j-1)}d(g(a_1|...|a_j))f(a_{j+1}|\cdots|a_n) \\ &\quad +(-1)^l\sum(-1)^{k(\tau_j+j-1)}(-1)^{\tau_i+i-1}g(a_1|...|da_i|...|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n) \\ &\quad +(-1)^l\sum(-1)^{k(\tau_j+j-1)}(-1)^{\tau_{i+1}+i-1}g(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_j)f(a_{j+1}|\cdots|a_n), \end{aligned}$$

ce qui coincide avec les trois premiers termes de $B$. De la même façon on peut voir que les trois derniers termes forme $(-1)^l gd(f)(a_1|\cdots|a_n)$.

Ce qui montre le lemme (3.2.9).

**Lemme 3.2.10** *La catégorie des foncteurs faibles est égale à la catégorie des éléments de Maurer-Cartan de la catégories des flèches , autrement dit :*

$$\mathcal{FF}(A,B) = \mathcal{MC}(\mathfrak{M}(A,B)). \tag{3.31}$$

**Preuve**

:

Un foncteur faible $\mathcal{F}$ consiste de $\varphi = ob(\mathcal{F}) : ob(A) \to ob(B)$ plus un élément

$$\mathcal{F} \in \mathfrak{M}A, B^1(\varphi,\varphi).$$

L'équation de Maurer-Cartan $d(\mathcal{F}) + \mathcal{FF} = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & d(\mathcal{F}(a_1|...|a_n)) \\ & - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_i+i-1} \mathcal{F}(a_1|...|da_i|...|a_n) \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\tau_{i+1}+i-1} \mathcal{F}(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\tau_i+i-1} \mathcal{F}(a_1|\cdots|a_i)\mathcal{F}(a_{i+1}|\cdots|a_n). \end{aligned}$$

ce qui est pareil que l'équation que doit satisaire $\mathcal{F}$. La différentielle $d_{fg}$ de la définition 3.2.3 est la même chose que la différentielle de Maurer-Cartan. ▲

Soit $\eta \in \mathcal{FF}(A,B)(f,g)$ . par définition, la catégorie des foncteurs faibles est égale à celle des élements de Maurer-cartan des flèches, on note par $d_{fg}$ la différentielle dans $\mathfrak{M}$ et par $d_{FG}$ celle dans $\mathcal{FF}$

*Démonstration du lemme (3.2.5) :* On a déjà démontré que $d_{fg}^2 = 0$ dans $MC(\mathfrak{M})$ , or $MC(\mathcal{M}) = \mathcal{FF}$ donc $d_{fg} = d_{FG}$ et donc $d_{fg}^2 = d_{FG}^2 = 0$ ce qui montre le lemme (3.2.5).

On note par $Comp_{...}$ la composition dans $\mathcal{FF}$. On a :

**Conjecture 3.2.11** *Soient $A, B$ et $C$ trois dg-catégories , alors*

$$Comp_{ABC} \in \mathcal{FF}\Big(\mathcal{FF}(B,C), \mathcal{FF}\big(\mathcal{FF}(A,B), \mathcal{FF}(A,C)\big)\Big)$$

## 3.3 Le nerf cohérent

Pour la définition du nerf cohérent d'un dg-algèbre de Lie, on peut se référer à [GETZ] et [HINI], qui ont donnés une définition en utilisant les espaces de formes sur un simplexe. Toutefois, cela ne donnera pas un schéma simplicial de type fini, car la dimension de ces espaces est l'$\infty$. Nous allons donner une définition du nerf cohérent d'une dg-catégorie qui conduira à un schéma simplicial de type fini. Cette définition est sans doute également bien connue aux experts.

Si $\mathcal{A}$ est une dg-catégorie, on définit $NC(\mathcal{A}) \in Ens^{\Delta^o}$ par

$$NC(\mathcal{A})_n := \mathcal{F}\mathcal{F}^{su}(I_n^{dg}, \mathcal{A})$$

où $I_n^{dg}$ est la dg-catégorie avec objets $\{0, 1, \cdots, n\}$ et

$$I_n^{dg}(i,j)^{\cdot} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ k & \text{en degré 0 si } i \geq j \end{cases}$$

On note par $e_{ij}$ l'élément de base de $I_n^{dg}(i,j)$ avec $e_{jk}.e_{ij} = e_{ik}$, et $e_{ii}$ représente l'identité.

**Explicitement**

Soit $n \in ob(\Delta)$, un $\alpha \in NC_n(\mathcal{A})$ est la donnée des $E_0, E_1, \cdots, E_n \in ob(\mathcal{A})$ et pour toute suite croissante

$$0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_k \leq n, \quad \alpha(i_0, \cdots, i_k) \in \mathcal{A}^{1-k}(E_{i_k}, E_{i_0})$$

satisfait aux conditions :
(i) “ su ” : si $i_j = i_{j+1}$ alors $\alpha(i_0, \cdots, i_j, i_{j+1}, \cdots, i_k) = 0$. Sauf pour le cas où $k = 1$ qui donne $\alpha(i,i) = 1_{E_i}$ l'identité sur $E_i$.
(ii)

$$d(\alpha(i_0, \cdots, i_k)) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \alpha(i_0, ..., i_j)\alpha(i_j, ..., i_k) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \alpha(i_0, ..., \hat{i}_j, ..., i_k)$$

provenant de la formule (3.1), on notons que tout les degrés des uniques morphismes $i_{j-1} \xleftarrow{e_{i_j i_{j-1}}} i_j$ sont 0 donc on a $\tau_j = 0$ .
En effet, pour un foncteur faible $\mathcal{F} \in \mathcal{F}\mathcal{F}^{su}(I_n^{dg}, \mathcal{A})$ on pose $E_i := ob(\mathcal{F})(i)$ et

$$\alpha(i_0, \cdots, i_k) := \mathcal{F}(e_{i_1,i_0}|e_{i_2,i_1}|\cdots|e_{i_k,i_{k-1}}).$$

La condition (i) est la condition de stricte unité de $\mathcal{F}$ et la conition (ii) c'est la formule de la définition 3.2.1.

**Remarque 3.3.1** On note que la construction Dold-Puppe peut être vue comme une construction du même type.

## 3.4 Du nerf cohérent vers le nerf simplicial

Soit $A$ une dg-catégorie, nous avons deux représentants pour l'$(\infty, 1)$-catégorie associée à $A$, la catégorie simpliciale $DP(A)$ et la quasi-catégorie $NC(A)$. On cherche un liens entre les deux. Rappelons que le nerf simplicial associera à notre catégorie simpliciale $DP(A)$ une quasi-catégorie $N(DP(A))$. Noter que les ensembles simpliciaux de $DP(A)$ sont des groupes simpliciaux donc ils satisfont les conditions de Kan.

Nous allons définir une application d'ensembles simpliciaux

$$NC(A) \to N(DP(A)).$$

A fin de construire ceci, nous allons commencer par définir un analogue en dg-catégorie qu'on le note par $\mathcal{E}^{(n)}$, de la catégorie simpliciale $\Sigma^{(n)}$.

Rappelons que $ob(\Sigma^{(n)}) = \{u_0, \cdots, u_n\}$, on pose également $ob(\mathcal{E}^{(n)}) = \{u_0, \cdots, u_n\}$. Pour les flèches on rappel que les ensembles simpliciaux de flèches de $\Sigma^{(n)}$ étaient de la forme $(\Delta^{[1]})^m$. On voudra faire le même avec $Delta^{[1]}$ remplacer par un complexe de groupes abéliens qui représente l'interval.

On pose $E := (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2)$ en degrés $-1$ et 0. Plus précisement $E^{-1}$ est engendré par un élément $v$, et $E^0$ est engendré par deux éléments $z$ et $e$ avac $d(v) = e - z$ . On dispose d'un morphisme $\Delta^{[1]} \to DP(E)$ qui peut être écrit explicitement.

On donne à $E$ une structure de dg-algèbre avec les multiplications suivantes :

$$e.e = e, \quad e.z = z.e = z.z = z, \quad e.v = v.e = v \quad \text{et} \quad z.v = v.z = 0.$$

L'identité est l'élément $e$. La multiplication $E \otimes E \to E$ permet de définir plus généralement un morphisme

$$E^{\otimes f} : E^{\otimes Y} \to E^{\otimes Z}$$

pour tout morphisme d'ensembles finis $f : Y \to Z$. Ici pour $Y = \{y_1, \cdots, y_a\}$ et $Z = \{z_1, \cdots, z_b\}$, on définit $E^{\otimes Y} := E^{\otimes a}$ et $E^{\otimes Z} := E^{\otimes b}$. L'image par $E^{\otimes f}$ d'un élément $c_1 \otimes \cdots \otimes c_a$ (avec $c_i \in E$) sera l'élément $c'_1 \otimes \cdots \otimes c'_b$ où

$$c'_j = \prod_{f(i)=j} c_i.$$

Le produit vide est par définition l'identité $e$.

On général, il faudrait rajouter un signe dans la définition de $c'_j$ mais dans notre cas, $f$ sera un morphisme d'ensembles ordonés, et on pourra garder le même ordre pour la composition.

On appliquant le produit $\mathcal{K}$ on obtient une application d'ensembles simpliciaux

$$(\Delta^{[1]})^m \to DP(E^{\otimes(m)}). \tag{3.32}$$

On définit la dg-catégorie $\mathcal{E}$ avec l'ensemble d'objets $\{u_0, \cdots, u_n\}$ par

$$\mathcal{E}^{(n)}(u_i, u_j) := E^{\otimes(j-i-1)}$$

il y a un facteur pour chaque objet strictement compris entre $u_i$ et $u_j$ (à lire en sens inverse). La composition de $\alpha \in \mathcal{E}^{(n)}(u_i, u_j)$ et $\beta \in \mathcal{E}^{(n)}(u_j, u_k)$

$$\beta \circ \alpha := \beta \otimes e \otimes \alpha.$$

Pour la fonctorialité en $n$ si $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$ est un morphisme de $\Delta$ on définit un morphisme

$$\mathcal{E}^{\varphi} : \mathcal{E}^{(n)} \to \mathcal{E}^{(m)}.$$

Sur les objets on a $\mathcal{E}^{\varphi}(u_i) = U_{\varphi(i)}$. Sur les morphismes on définit

$$\mathcal{E}^{(n)}(u_i, u_j) = E^{\otimes(j-i-1)} \to E^{\otimes(\varphi(j)-\varphi(i)-1)} = \mathcal{E}^{(m)}(u_{\varphi(i)}, u_{\varphi(j)})$$

par $E^{\otimes f}$ pour l'application :

$$f : \{j-1, \cdots, i+1\} \to \{\varphi(j)-1, \cdots, \varphi(i)+1\}$$

induite par $\varphi$ en renversant l'ordre.

**Proposition 3.4.1** *Les applications* (3.32) *définissent des morphismes des catégories simpliciales*

$$\Sigma^{(n)} \to DP(\mathcal{E}^{(n)})$$

**Proposition 3.4.2** *Le nerf cohérent peut être défini à l'aide d'un objet simplicial $\mathcal{E}^{(\cdot)}$, c'est-à-dire que si $A$ est une dg-catégorie alors*

$$NC(A)_n = Fonct_{dg-cat}(\mathcal{E}^{(n)}, A).$$

On illustre cette proposition par un exemple. Soit $(X_0, \cdots, X_n, \alpha)$ un élément de $NC(A)_n$, on rappel que $\alpha(i_0, \cdots, i_k) \in A^{1-k}(X_{i_0}, X_{i_k})$ . Cela correspond à un foncteur $\mathcal{E}^{(n)} \to A$ qui envoie $u_i$ sur $X_i$. Pour montrer l'effet sur les morphismes, prenons par exemple un élément :

$$v \otimes z \otimes e \otimes v \otimes v \otimes z \otimes e \otimes z \in \mathcal{E}^{(n)}(u_1, u_{10})$$

son image est le morphisme

$$\alpha(7,9,10)\alpha(3,5,6,7)\alpha(1,3) \in A^{-3}(X_1, X_{10}).$$

Maintenant on peut définir l'application

$$NC(A) \to N(DP(A)).$$

En effet ; pour tout $n \in \Delta$ on a $N(DP(A))_n = Fonct_{SCAT}(\Sigma^{(n)}, DP(A))$. Un élément $\alpha \in NC(A)_n$ correspond à un foncteur $\mathcal{E}^{(n)} \to A$ de dg-catégories. Donc on a

$$DP(\alpha) : DP(\mathcal{E}^{(n)}) \to DP(A)$$

on compose avec le foncteur de la proposition 3.4.1, on obtient un foncteur de $\Sigma^{(n)}$ dans $DP(A)$.

Dans la présente version, on admet que ce morphisme est une équivalence entre les deux quasi-catégories

$$NC(A) \sim N(DP(A)).$$

Ceci donnerait l'équivalence entre les deux façons de passer des dg-catégories vers les $(\infty, 1)$-catégories.

Si on passe aux intérieurs, on peut montrer cette équivalnce en montrant qu'elle induit des isomorphismes des groupes d'homotopies.

# Chapitre 4

# Les Schémas de paramètres

Dans ce chapitre on va rappeler la construction du schéma d'Eisenbud-Buchsbaum (voir [BENZ08]) et on montrera par quelques exemples le fonctionnement de cette construction.

## 4.1 Le schéma d'Eisenbud-Buchsbaum

**Définition 4.1.1** *Soit $B$ un anneau commutatif unitaire et soit $(C, d)$ un complexe*

$$... \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \to ...$$

*tels que les $d^i$ sont des applications linéaires tels que $d^i \circ d^{i-1} = 0 \quad \forall i$. Un tel complexe est dit strictement parfait s'il est de longueur fini et si les $B$-modules $C^i$ sont libres du rangs finis.*

*Si on munit les $C^i$ par des $B$-bases $\{\beta^i_{s_1}, ..., \beta^i_{s_n}\}$, on dit que cette complexe est strictement parfait rigidifié et on le note par $(C^i, d, \beta^i_{s_1}, ..., \beta^i_{s_n})$*

Soit $K$ un anneau commutatif, il existe une correspendence entre les schémas affines $Spec(K)$ et les anneaux commutatifs associés

$$K \leftrightarrow Spec(K).$$

Cette correspendance est contravariante, car si $K \to K'$ est un morphisme d'anneaux, alors il existe un morphisme de schémas $Spec(K') \to Spec(K)$. On voudrait construire un anneau $K$ tel que $V = Spec(K)$ parametrise les complexes parfaits rigidifiés. Ceci veut dire construire un complexe parfait universel sur $K$.

Soit $E^0, E^1, ..., E^n$ une suite d'espaces vectoriels (ou des modules sur un anneau $K$), à partir de cette suite on peut considérer les complexes

$$... \to 0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} ... \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \to 0...$$

où d'abord, simplement les collections d'applications possibles entre $E^i$ et $E^{i+1}$ pour tout $i \in \{0,1,...,n-1\}$. (C'est-à-dire : $d^i \in Hom(E^i, E^{i+1}), \forall i \in \{0,1,...,n-1\}$).

On parametrise d'abord l'ensemble de ces collections, ensuite on impose la condition $d^2 = 0$. On fixe $r_0, r_1, ..., r_n$ de sorte que

$$\forall i = 0,...,n; \quad E^i \cong K^{r_i}$$

Donc on peut avoir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
... & 0 \to & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \xrightarrow{d^1} & ... & \xrightarrow{d^{n-1}} & E^n & \longrightarrow 0 & ... \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & ... & & \downarrow\cong & & \\
... & 0 \to & K^{r_0} & \xrightarrow{d'^0} & K^{r_1} & \xrightarrow{d'^1} & ... & \xrightarrow{d'^{n-1}} & K^{r_n} & \longrightarrow 0 & ...
\end{array}$$

où à chaque fois si $E^i \cong K^{r_i}$ alors

$$Hom(E^i, E^{i+1}) \cong K^{r_i r_{i+1}} \cong \mathcal{M}_{r_i, r_{i+1}}(K)$$

avec $\mathcal{M}_{r_i, r_{i+1}}(K)$ est l'ensemble des matrices $r_i \times r_{i+1}$ sur $K$.
Soit

$$N := r_1 r_0 + r_2 r_1 + ... + r_n r_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} r_i r_{i-1}$$

et on note l'ensemble des coordonnées de $(d^0, d^1, ..., d^n)$ par $\mathbb{A}^N$ et on écrit

$$\mathbb{A}^N = \{X_{l,k}^{j,j-1} \text{ avec } 1 \leq l \leq r_j, 1 \leq k \leq r_{j-1}, 1 \leq j \leq n\}$$

avec

$$X^0_{.,.} = \begin{pmatrix} X^0_{1,1} & X^0_{1,2} & \cdots & X^0_{1,r_0} \\ X^0_{2,1} & X^0_{2,2} & \cdots & . \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^0_{r_1,1} & . & \cdots & X^0_{r_1,r_0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_0,r_1}(K)$$

$$X^1_{.,.} = \begin{pmatrix} X^1_{1,1} & X^1_{1,2} & \cdots & X^1_{1,r_1} \\ X^1_{2,1} & X^1_{2,2} & \cdots & . \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^1_{r_2,1} & . & \cdots & X^1_{r_2,r_1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_1,r_2}(K)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$X^{n-1}_{.,.} = \begin{pmatrix} X^{n-1}_{1,1} & X^{n-1}_{1,2} & \cdots & X^{n-1}_{1,r_{n-1}} \\ X^{n-1}_{2,1} & X^{n-1}_{2,2} & \cdots & . \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^{n-1}_{r_n,1} & . & \cdots & X^{n-1}_{r_n,r_{n-1}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_{n-1},r_n}(K).$$

Donc on a une correspendence entre

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^N \leftrightarrow & K[X^{j,j-1}_{.,.}, \quad 1 \leq j \leq n] & \\ & \cong \qquad K[Y_1, ..., Y_N] & \leftrightarrow \mathbb{A}^N. \end{array}$$

Ce $\mathbb{A}^N$ est l'espace de tous les choix des collections $(d^0, d^1, ..., d^n)$. On définira $V$ comme sous-variétée fermée de $\mathbb{A}^N$ en utilisant l'equation $d^2 = 0$ . Pour définir $V$ on donnera maintenant son idéal.

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par tous les composantes des compositions

$$\{X^l_{.,.} \circ X^{l-1}_{.,.}, \quad \forall l = 1, ..., n-1\} \sim \{d_l \circ d_{l-1}, \quad \forall l = 1, ..., n-1\}$$

**Construction 4.1.2** *On suppose l'application*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : K[X^{.}_{..}] & \to & A = K[X^{.}_{..}]/\mathcal{I} \\ X^{l-1}_{.,.} & \mapsto & \dot{\gamma}(X^{l-1}_{.,.}) \in \mathcal{M}_{r_l, r_{l-1}}(A) \end{array}$$

*de sorte que*

$$\gamma(X^l_{.,.}).\gamma(X^{l-1}_{.,.}) = 0$$

**Exemple 4.1.3** – *Pour* $r = (r_0, r_1, r_2) = (2, 2, 2)$

*Soit*

$$X^0_{.,.} = \begin{pmatrix} X^0_{1,1} & X^0_{1,2} \\ X^0_{2,1} & X^0_{2,2} \end{pmatrix} \quad et \quad X^1_{.,.} = \begin{pmatrix} X^1_{1,1} & X^1_{1,2} \\ X^1_{2,1} & X^1_{2,2} \end{pmatrix}$$

*alors la compostion de ces deux matrices est*

$$\begin{pmatrix} X^1_{1,1} & X^1_{1,2} \\ X^1_{2,1} & X^1_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0_{1,1} & X^0_{1,2} \\ X^0_{2,1} & X^0_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^1_{1,1}X^0_{1,1} + X^1_{1,2}X^0_{2,1} & X^1_{1,1}X^0_{1,2} + X^1_{1,2}X^0_{2,2} \\ X^1_{2,1}X^0_{1,1} + X^1_{2,2}X^0_{2,1} & X^1_{2,1}X^0_{1,2} + X^1_{2,2}X^0_{2,2} \end{pmatrix}$$

*donc l'idéal $\mathcal{I}$ est engendré par les quatres composantes de cette matrice et on écrit*

$$\mathcal{I} = \langle X^1_{1,1}X^0_{1,1} + X^1_{1,2}X^0_{2,1}, X^1_{1,1}X^0_{1,2} + X^1_{1,2}X^0_{2,2}, X^1_{2,1}X^0_{1,1} + X^1_{2,2}X^0_{2,1}, X^1_{2,1}X^0_{1,2} + X^1_{2,2}X^0_{2,2} \rangle$$

– *Pour* $r = (2, 3, 2)$

*Soit*

$$X^0_{.,.} = \begin{pmatrix} X^0_{1,1} & X^0_{1,2} \\ X^0_{2,1} & X^0_{2,2} \\ X^0_{3,1} & X^0_{3,2} \end{pmatrix} \quad et \quad X^1_{.,.} = \begin{pmatrix} X^1_{1,1} & X^1_{1,2} & X^1_{1,3} \\ X^1_{2,1} & X^1_{2,2} & X^1_{2,3} \end{pmatrix}$$

*alors la compostion des de ces deux matrices est*

$$\begin{pmatrix} X^1_{1,1} & X^1_{1,2} & X^1_{1,3} \\ X^1_{2,1} & X^1_{2,2} & X^1_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0_{1,1} & X^0_{1,2} \\ X^0_{2,1} & X^0_{2,2} \\ X^0_{3,1} & X^0_{3,2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} X^1_{1,1}X^0_{1,1} + X^1_{1,2}X^0_{2,1} + X^1_{1,3}X^0_{3,1} & X^1_{1,1}X^0_{1,2} + X^1_{1,2}X^0_{2,2} + X^1_{1,3}X^0_{3,2} \\ X^1_{2,1}X^0_{1,1} + X^1_{2,2}X^0_{2,1} + X^1_{2,3}X^0_{3,1} & X^1_{2,1}X^0_{1,2} + X^1_{2,2}X^0_{2,2} + X^1_{2,3}X^0_{3,2} \end{pmatrix}$$

*Donc*

$$\mathcal{I} = \langle X^1_{1,1}X^0_{1,1} + X^1_{1,2}X^0_{2,1} + X^1_{1,3}X^0_{3,1}, X^1_{1,1}X^0_{1,2} + X^1_{1,2}X^0_{2,2} + X^1_{1,3}X^0_{3,2},$$
$$X^1_{2,1}X^0_{1,1} + X^1_{2,2}X^0_{2,1} + X^1_{2,3}X^0_{3,1}, X^1_{2,1}X^0_{1,2} + X^1_{2,2}X^0_{2,2} + X^1_{2,3}X^0_{3,2}\rangle$$

Soit $V \subseteq \mathbb{A}^N$ le sous-schéma définit par $\mathcal{I}$ et on suppose le complexe ouvert des $A$-modules correspendant à $V$

$$\mathcal{C}_V = A^{r_0} \xrightarrow{\gamma(X^{1,0})} A^{r_1} \xrightarrow{\gamma(X^{2,1})} ... \xrightarrow{\gamma(X^{n,n-1})} A^{r_n}$$

A partir de cette construction, nous pouvons énoncer la propriété universel suivante

**Théorème 4.1.4** *Soit $K$ un corps. Soit $B$ un $K$-algebre, et $\mathcal{C}$ un complexe des $B$-modules définit par*

$$\mathcal{C}^i = \begin{cases} 0 & & si\ i < 0\ ou\ i > n \\ B^{r_i} & B\text{-modules libres de rang } r_i & si\ 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

*alors, avec la construction (4.1.2) de $A$ il existe un unique morphisme d'anneaux $A \xrightarrow{\varphi} B$ ($Spec(B)) \to V$) et un unique isomorphisme de complexes*

$$q : \mathcal{C} \cong \mathcal{C}_V \otimes_A B$$

*tel que*

$$\forall i = 1..n, \quad q^i : \mathcal{C}^i = B^{r_i} \to \mathcal{C}_V \otimes_A B = A^{r_i} \otimes_A B = B^{r_i}$$

*est l'identité*

**Exemple 4.1.5** *Dans l'exemple (2.2.1) de [BENZ08] le cas où $r = (2, 3, 2)$. On définit le complexe $C^{\cdot}$ par*

$$...0 \to B^2 \xrightarrow{d^0} B^3 \xrightarrow{d^1} B^2 \to 0...$$

*où $d^0$ et $d^1$ sont deux applications linéaires définit par les matrices suivantes*

$$d^1\ par\ \begin{pmatrix} b^1_{1,1} & b^1_{1,2} & b^1_{1,3} \\ b^1_{2,1} & b^1_{2,2} & b^1_{2,3} \end{pmatrix}$$

*et*

$$d^0\ par \begin{pmatrix} b^0_{1,1} & b^0_{1,2} \\ b^0_{2,1} & b^0_{2,2} \\ b^0_{3,1} & b^0_{3,2} \end{pmatrix}$$

*telle que le produit des deux matrices est nul*

$$\begin{pmatrix} b^1_{1,1} & b^1_{1,2} & b^1_{1,3} \\ b^1_{2,1} & b^1_{2,2} & b^1_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^0_{1,1} & b^0_{1,2} \\ b^0_{2,1} & b^0_{2,2} \\ b^0_{3,1} & b^0_{3,2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b^1_{1,1}b^0_{1,1} + b^1_{1,2}b^0_{2,1} + b^1_{1,3}b^0_{3,1} & b^1_{1,1}b^0_{1,2} + b^1_{1,2}b^0_{2,2} + b^1_{1,3}b^0_{3,2} \\ b^1_{2,1}b^0_{1,1} + b^1_{2,2}b^0_{2,1} + b^1_{2,3}b^0_{3,1} & b^1_{2,1}b^0_{1,2} + b^1_{2,2}b^0_{2,2} + b^1_{2,3}b^0_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*ce qui nous donne un systhère de générateurs d'un idéal* $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$ *tel que*

$$\begin{cases} f_1 : & b^1_{1,1}b^0_{1,1} + b^1_{1,2}b^0_{2,1} + b^1_{1,3}b^0_{3,1} & = 0 \\ f_2 : & b^1_{1,1}b^0_{1,2} + b^1_{1,2}b^0_{2,2} + b^1_{1,3}b^0_{3,2} & = 0 \\ f_3 : & b^1_{2,1}b^0_{1,1} + b^1_{2,2}b^0_{2,1} + b^1_{2,3}b^0_{3,1} & = 0 \\ f_4 : & b^1_{2,1}b^0_{1,2} + b^1_{2,2}b^0_{2,2} + b^1_{2,3}b^0_{3,2} & = 0 \end{cases}$$

*On définit le morphisme d'anneaux* $\phi$ *par*

$$\begin{array}{rcl} K[X^1_{1,1}, ..., X^1_{2,3}, X^0_{1,1}, ..., X^0_{3,2}] & \xrightarrow{\phi} & B \\ x \in K & \mapsto & x \\ X^1_{1,1} & \mapsto & b^1_{1,1} \\ X^1_{1,2} & \mapsto & b^1_{1,2} \\ X^1_{1,3} & \mapsto & b^1_{1,3} \\ X^1_{2,1} & \mapsto & b^1_{2,1} \\ X^1_{2,2} & \mapsto & b^1_{2,2} \\ X^1_{2,3} & \mapsto & b^1_{2,3} \\ X^0_{1,1} & \mapsto & b^0_{1,1} \\ X^0_{1,2} & \mapsto & b^0_{1,2} \\ X^0_{2,1} & \mapsto & b^0_{2,1} \\ X^0_{2,2} & \mapsto & b^0_{2,2} \\ X^0_{3,1} & \mapsto & b^0_{3,1} \\ X^0_{3,2} & \mapsto & b^0_{3,2} \end{array}$$

*et par la propriété universelle de l'anneau quotient* $K[X^1_{1,1}, ..., X^1_{2,3}, X^0_{1,1}, ..., X^0_{3,2}]$ *par un idéal, On a un morphisme*

$$K[X^1_{1,1}, ..., X^1_{2,3}, X^0_{1,1}, ..., X^0_{3,2}]/I \to B$$

*tel que* $\phi(I) = 0$
*En effet ;*

$$\begin{array}{rl} \phi(I) = & \phi(\langle X^1_{1,1}X^0_{1,1} + X^1_{1,2}X^0_{2,1} + X^1_{1,3}X^0_{3,1}, X^1_{1,1}X^0_{1,2} + X^1_{1,2}X^0_{2,2} + X^1_{1,3}X^0_{3,2} \\ & X^1_{2,1}X^0_{1,1} + X^1_{2,2}X^0_{2,1} + X^1_{2,3}X^0_{3,1}, X^1_{2,1}X^0_{1,2} + X^1_{2,2}X^0_{2,2} + X^1_{2,3}X^0_{3,2}\rangle) \\ = & \langle \phi(X^1_{1,1}X^0_{1,1} + X^1_{1,2}X^0_{2,1} + X^1_{1,3}X^0_{3,1}), \phi(X^1_{1,1}X^0_{1,2} + X^1_{1,2}X^0_{2,2} + X^1_{1,3}X^0_{3,2}), \\ & \phi(X^1_{2,1}X^0_{1,1} + X^1_{2,2}X^0_{2,1} + X^1_{2,3}X^0_{3,1}), \phi(X^1_{2,1}X^0_{1,2} + X^1_{2,2}X^0_{2,2} + X^1_{2,3}X^0_{3,2})\rangle \\ = & \langle b^1_{1,1}b^0_{1,1} + b^1_{1,2}b^0_{2,1} + b^1_{1,3}b^0_{3,1}, b^1_{1,1}b^0_{1,2} + b^1_{1,2}b^0_{2,2} + b^1_{1,3}b^0_{3,2}, \\ & b^1_{2,1}b^0_{1,1} + b^1_{2,2}b^0_{2,1} + b^1_{2,3}b^0_{3,1}, b^1_{2,1}b^0_{1,2} + b^1_{2,2}b^0_{2,2} + b^1_{2,3}b^0_{3,2}\rangle \\ = & \langle 0, 0, 0, 0\rangle = \langle 0\rangle = 0. \end{array}$$

**Preuve 4.1.6** *On suivant les mêmes démarches de l'exemple précident, on considère le complexe*

$$0 \to B^{r_0} \xrightarrow{d^0} B^{r_1} \to ... \to B^{r_{i-1}} \xrightarrow{d^{i-1}} B^{r_i} \xrightarrow{d^i} B^{r_{i+1}} \to ... \to B^{r_n} \to 0$$

*avec* $d^0, ..., d^{i-1}, d^i, ...d^{n-1}$ *sont des applications linéaires représentées par des matrices*

$$d^0 := \begin{pmatrix} b^0_{1,1} & b^0_{1,2} & ... & b^0_{1,r_1} \\ b^0_{2,1} & b^0_{2,2} & ... & b^0_{2,r_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^0_{r_2,1} & b^0_{r_2,2} & ... & b^0_{r_2,r_1} \end{pmatrix},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$d^{i-1} := \begin{pmatrix} b^{i-1}_{1,1} & b^{i-1}_{1,2} & ... & b^{i-1}_{1,r_{i-1}} \\ b^{i-1}_{2,1} & b^{i-1}_{2,2} & ... & b^{i-1}_{2,r_{i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{i-1}_{r_i,1} & b^{i-1}_{r_i,2} & ... & b^{i-1}_{r_i,r_{i-1}} \end{pmatrix},$$

$$d^i := \begin{pmatrix} b^i_{1,1} & b^i_{1,2} & ... & b^i_{1,r_i} \\ b^i_{2,1} & b^i_{2,2} & ... & b^i_{2,r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^i_{r_{i+1},1} & b^i_{r_{i+1},2} & ... & b^i_{r_{i+1},r_i} \end{pmatrix},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$d^{n-1} := \begin{pmatrix} b^{n-1}_{1,1} & b^{n-1}_{1,2} & ... & b^{n-1}_{1,r_{n-1}} \\ b^{n-1}_{2,1} & b^{n-1}_{2,2} & ... & b^{i-1}_{2,r_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n-1}_{r_n,1} & b^{n-1}_{r_n,2} & ... & b^{n-1}_{r_n,r_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

*Soit* $\{e^{i-1}_1, ..., e^{i-1}_{r_{i-1}}\}$ *une base de* $B^{r_{i-1}}$, *et soit* $\{e^i_1, ..., e^i_{r_i}\}$ *une base de* $B^{r_i}$, *alors*

$$\forall j_{i-1} = 1, ..., r_{i-1} \quad d^{i-1}(e^{i-1}_{j_{i-1}}) = \begin{pmatrix} b^{i-1}_{1,j_{i-1}} \\ b^{i-1}_{2,j_{i-1}} \\ \vdots \\ b^{i-1}_{r_i,j_{i-1}} \end{pmatrix} \in B^{r_i}$$

$$\forall j_i = 1, ..., r_i \qquad d^i(e^i_{j_i}) = \begin{pmatrix} b^i_{1,j_i} \\ b^i_{2,j_i} \\ \vdots \\ b^i_{r_{i+1},j_i} \end{pmatrix} \in B^{r_{i+1}}$$

*tels que leurs composition*

$$d^i d^{i-1} := \begin{pmatrix} b^i_{1,1} & b^i_{1,2} & ... & b^i_{1,r_i} \\ b^i_{2,1} & b^i_{2,2} & ... & b^i_{2,r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^i_{r_{i+1},1} & b^i_{r_{i+1},2} & ... & b^i_{r_{i+1},r_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{i-1}_{1,1} & b^{i-1}_{1,2} & ... & b^{i-1}_{1,r_{i-1}} \\ b^{i-1}_{2,1} & b^{i-1}_{2,2} & ... & b^{i-1}_{2,r_{i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{i-1}_{r_i,1} & b^{i-1}_{r_i,2} & ... & b^{i-1}_{r_i,r_{i-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

*est nulle pour tout $i = 1, ..., n$.*
*Or, les produits des matrices sont donnés par*

$$F^i := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{1,k} b^{i-1}_{k,1} & \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{1,k} b^{i-1}_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{1,k} b^{i-1}_{k,r_{i-1}} \\ \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{2,k} b^{i-1}_{k,1} & \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{2,k} b^{i-1}_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{2,k} b^{i-1}_{k,r_{i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{r_{i+1},k} b^{i-1}_{k,1} & \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{r_{i+1},k} b^{i-1}_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^{r_i} b^i_{r_{i+1},k} b^{i-1}_{k,r_{i-1}} \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, ..., n-1$$

*On note par $f^i_{.,.}$ les composantes de $F^i$ pour tout $i$, ce que nous pouvons le représenter sous la forme*

$$F^i := \begin{pmatrix} f^i_{1,1} & f^i_{1,2} & \dots & f^i_{1,r_{i-1}} \\ f^i_{2,1} & f^i_{2,2} & \dots & f^i_{2,r_{i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^i_{r_{i+1},1} & f^i_{r_{i+1},2} & \dots & f^i_{r_{i+1},r_{i-1}} \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, ..., n-1$$

*et on définit un système de générateurs d'un idéal*

$$\mathcal{I} = \langle f^1_{1,1}, ..., f^1_{1,r_0}, f^1_{2,1}, ..., f^1_{2,r_0}, ..., f^1_{r_2,1}, ..., f^1_{r_2,r_0}, ..., f^{n-1}_{1,1}, ..., f^{n-1}_{1,r_{n-2}}, f^{n-1}_{2,1}, ..., f^{n-1}_{2,r_{n-2}}, ..., f^{n-1}_{r_n,1}, ..., f^{n-1}_{r_n,r_{n-2}} \rangle$$

*on a exactement $N = \sum_{j=1}^{n} r_{j-1} r_j$ éléments et on définit le morphisme $\phi$ par*

$$\begin{array}{rcc} K[X^{i-1}_{.,.}, i = 1, ..., n] & \to & B \\ x \in K & \mapsto & x \\ X^0_{1,1} & \mapsto & b^0_{1,1} \\ X^0_{1,2} & \mapsto & b^0_{1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^0_{1,r_0} & \mapsto & b^0_{1,r_0} \\ X^1_{1,1} & \mapsto & b^1_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^1_{1,r_0} & \mapsto & b^1_{1,r_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^{n-1}_{1,1} & \mapsto & b^{n-1}_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^{n-1}_{1,r_{n-1}} & \mapsto & b^{n-1}_{1,r_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^{n-1}_{r_n,1} & \mapsto & b^{n-1}_{r_n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^{n-1}_{r_n,r_{n-1}} & \mapsto & b^{n-1}_{r_n,r_{n-1}} \end{array}$$

*On appliquant la propriété universel des anneaux quotients par un idéal, nous allons avoir un morphisme*

$$K[X^{i-1}_{.,.}, i = 1, ..., n]/\mathcal{I} \to B$$

*tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} K[X^{i-1}_{.,.}, i = 1, ..., n] \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & K[X^{i-1}_{.,.}, i = 1, ..., n]/\mathcal{I} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

*commute, et tel que* $\phi(\mathcal{I}) = 0$.

*En effet ; on appliquant* $\phi$ *sur* $\mathcal{I}$ *revient à l'appliquer sur tout les élément qui ont comme images par* $\phi$ *les éléments* $f^1_{1,1}, ..., f^1_{1,r_0}, f^1_{2,1}, ..., f^1_{2,r_0}, ..., f^1_{r_2,1}, ..., f^1_{r_2,r_0}, ..., f^{n-1}_{1,1}, ..., f^{n-1}_{1,r_{n-2}}, f^{n-1}_{2,1}, ..., f^{n-1}_{2,r_{n-2}}, ..., f^{n-1}_{r_n,1}, ..., f^{n-1}_{r_n,r_{n-2}}$ *qui sont tous nuls par le fait que* $d^2 = 0$
*Donc*

$$\phi(\mathcal{I}) = \langle 0, ..., 0\rangle = \langle 0\rangle = 0$$

*Pour démontrer l'unicité de* $\phi$*, on note simplement que* $\phi(X^{\cdot}_{.,.})$ *sont les coefficients des* $d^i$ *en termes des bases données de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *. L'unicitè de* $q$ *découle de la condition que les* $q^i$ *soient l'identité.*

## 4.2 Construction de la carte $\varphi : V \to \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$

En s'inspirant du schéma des complexes pour construire un nouveau schéma des éléments de Maurer-Cartan, ceci nous fournira une carte pour le $n$-champ $\mathcal{MC}$. On fera les hypothèses suivantes (voir section 5.2 ) :

Soit $k$ un corps. On fixera par la suite une $dg$-catégorie $k$-linéaire $\mathcal{P}$ qui satisfait aux hypothèses suivant :

1. L'ensemble des objets $Ob(\mathcal{P})$ est fini.
2. Pour tout $E, F \in Ob(\mathcal{P})$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}^i(E, F)$ est un $k$-espace vectoriel de dimension fini.
3. Il existe un indice $n > 0$ tel que pour tout $i < -n$, le $k$-espace vectoriel $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$.

**Remarque 4.2.1** Si $\mathcal{P}^{\cdot}(E, F)$ est un complexe strictement parfait sur $k$, alors les hypothèses 2 et 3 sont assurées, et pour l'hypothèse 3 on peut juste dire qu'il existe un $n$ tel que $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$, pour $| i |> n$ (c'est-à-dire : $i \notin [-n, n]$).

On choisit des $k$-bases $e^1, \dots, e^r \in \mathcal{P}^1(E, E)$ et $f^1, \dots, f^s \in \mathcal{P}^2(E, E)$, et on définit l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1(E, E) \times \mathcal{P}^1(E, E) &\to \mathcal{P}^2(E, E) \\ (e^i, e^j) &\mapsto e^i e^j = \sum_{l=1}^{s} a^{ij}_l f^l \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec

$$\mathcal{P}^1(E,E) = k^r = \{\sum x_i e^i, \quad x_i \in k, e^i \in \mathcal{P}^1\} \tag{4.2}$$

et

$$\mathcal{P}^2(E,E) = k^s = \{\sum y_l f^l, \quad y_l \in k, f^l \in \mathcal{P}^2\}$$

les coefficients structurels $a_l^{ij} \in k$ sont unique. La différentielle

$$\begin{aligned} d : \mathcal{P}^1(E,E) &\rightarrow \mathcal{P}^2(E,E) \\ e^i &\mapsto d(e^i) = \sum_{l=1}^{s} y_l^i f^l \end{aligned} \tag{4.3}$$

et $(z^1, \ldots, z^s) \in k^s$. Pour un $\eta = \sum_{i=1}^r z_i e^i \in \mathcal{P}^1(E,E)$, on a

$$\begin{aligned} \eta^2 &= (\sum_{i=1}^{r} z_i e^i)(\sum_{j=1}^{r} z_j e^j) \\ &= \sum_{i,j} z_i z_j e^i e^j \\ &= \sum_{i,j} z_i z_j (\sum_{l=1}^{s} a_l^{ij} f^l) \\ &= \sum_{l=1}^{s} (\sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij}) f^l. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(\eta) &= d(\sum_{i=1}^{r} z_i e^i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} z_i d(e^i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} z_i (\sum_{l=1}^{s} b_l^i f^l) \\ &= \sum_{l=1}^{s} (\sum_{i=1}^{r} z_i b_l^i) f^l \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(\eta)+\eta^2 &= \sum_{i=1}^{r} z_i(\sum_{l=1}^{s} y_l^i f^l) + \sum_{i,j} z_i z_j (\sum_{l=1}^{s} a_l^{ij} f^l) \\ &= \sum_{l=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r} z_i y_l^i) f^l + \sum_{l=1}^{s}(\sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij}) f^l \\ &= \sum_{l=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r} z_i y_l^i + \sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij}) f^l \\ &= \sum_{l=1}^{s} c_l f^l \quad et \quad c_l = \sum_{i=1}^{r} z_i b_l^i + \sum_{i,j} z_i z_j a_l^{ij} \end{aligned}$$

Notre question est de construire un foncteur $Alg-Com_k \to \mathcal{E}ns$ qui a pour chaque anneau (ou algèbre) $B$ son image l'nsemble des points de $B$ et montrer qu'il est représentable par un schéma affine qu'on notera par $V_E$. Pour cela on définit les schémas affines par le foncteur $Spec$ et on les note par

$$\mathcal{P}^1_{sch}(E,E) := Spec(k[x_1,\dots,x_r])$$

et

$$\mathcal{P}^2_{sch}(E,E) := Spec(k[y_1,\dots,y_s])$$

$$\mathcal{P}^1_{sch}(B) = \mathcal{P}^1(E,E)\otimes_k B = \mathbb{A}^r(B) = B^r$$

On peut ensuite utiliser les mêmes équations pour des $z_i \in B$ et $B$ une algèbre commutative et on définit l'espace $B^r$ par

$$\begin{aligned} B^r &= k^r \otimes_k B \\ &= \{(z_1,\dots,z_r) : z_i \in B \quad \forall i \in \{1,\dots,r\}\} \\ &= \{\sum_{i=1}^{r} e^i \otimes z_i, \quad z_i \in B, e^i \in \mathcal{P}^1(E,E)\} \\ &= \mathcal{P}^1(E,E)\otimes_k B \end{aligned}$$

Comme

$$(\mathcal{P}^1(E,E)\otimes_k B)\otimes_k(\mathcal{P}^1(E,E)\otimes_k B) = (\mathcal{P}^1(E,E)\otimes_k \mathcal{P}^1(E,E))\otimes_k B$$

On peut définir un produit similaire que (4.1) par :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^1(E,E)\otimes_k \mathcal{P}^1(E,E))\otimes_k B &\to \mathcal{P}^2(E,E)\otimes_k B \\ (\sum_{i=1}^{r} e^i \otimes z_i, \sum_{j=1}^{r} e^j \otimes z_j) &\mapsto \sum_{i,j=1}^{r} e^i e^j \otimes z_i z_j \end{aligned}$$

d'après la formule (4.1) pour tout $\eta_B \in \mathcal{P}^1(E,E)\otimes_k B$ on peut calculer $\eta^2 \in \mathcal{P}^2(E,E)\otimes_k B$ par

$$\begin{aligned}
\eta_B^2 &= (\sum_{i=1}^{r} e^i \otimes z_i)(\sum_{j=1}^{r} e^j \otimes z_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} e^i e^j \otimes z_i z_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} (\sum_{l=1}^{s} a_l^{ij} f^l) \otimes z_i z_j \\
&= \sum_{l=1}^{s} (\sum_{i,j=1}^{r} a_l^{ij} \otimes z_i z_j) f^l
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
d(\eta_B) &= d(\sum_{i=1}^{r} e^i \otimes z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} d(e^i \otimes z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} (d(e^i) \otimes z_i + e^i \otimes d(z_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{r} d(e^i) \otimes z_i \qquad car \quad d(z_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \\
&= \sum_{i=1}^{r} (\sum_{l=1}^{s} b_l^i f^l) \otimes z_i \\
&= \sum_{l=1}^{s} (\sum_{i=1}^{r} b_l^i \otimes z_i) f^l
\end{aligned}$$

Donc

$$d(\eta_B) + \eta_B^2 = \sum_{l=1}^{s} (\sum_{i=1}^{r} b_l^i \otimes z_i) f^l + \sum_{l=1}^{s} (\sum_{i,j=1}^{r} a_l^{ij} \otimes z_i z_j) f^l$$

On note le foncteur $V_E$ par

$$V_E(B) = \{\sigma \in \mathcal{P}^1(E,E) \otimes_k B, \quad \text{tel que} \quad d(\sigma) + \sigma^2 = 0\} \tag{4.4}$$

l'ensemble des éléments de Maurer-Cartan de $\mathcal{P}^1(E,E) \otimes_k B$ qui peut être vue comme un foncteur représentable par un schéma affine

$$V_E(B) : k - Alg \to \mathcal{E}ns$$

**Proposition 4.2.2** *Le foncteur $V_E(B)$ est le préimage de l'origine de l'espace affine $\mathcal{P}^2_{sch}(E,E)$, par le morphisme* courb. *Par conséquent, $V_E(B)$ est représenté par le schéma affine*

$$V_E(B) = Spec\left(\frac{k[x_1,\dots,x_r]}{\mathcal{I}}\right)$$

*où $\mathcal{I}$ est l'idéal engendré par les éléments*

$$\mathrm{courb}^*(y_l) = \sum_{i=1}^{r} b_l^i x_i + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_l^{ij} x_i x_j.$$

Nous obtenons donc un schéma affine $V_E$ et un morphisme $V_E \to \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$.

## 4.3 Construction d'un schéma simplicial

Par définition, on sait qu'il existe des liens entre les $\infty$-groupoïdes, les espaces et les ensembles simpliciaux ($Ens^{\Delta^o} := \{\Delta^o \to Ens\}$), donc tout préfaisceau en $\infty$-groupoïdes peut être considéré comme un préfaisceau simplicial $X$ avec

$$\begin{aligned} X &= AlgCom_k \to Ens^{\Delta^o} \\ &= AlgCom_k \times \Delta^o \to Ens \\ &= \Delta^o \to Fonct(AlgCom_k, Ens) \end{aligned}$$

Dans [PRID], il considère $X$ tel que pour tout $n \in \Delta$ les $X_n : AlgCom_k \to Ens$ sont représentables par des schémas.

Le cas où $X.$ est un schéma simlicial, on va expliciter le schéma simplicial

$$\cdots \rightrightarrows \cdots X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0$$

tel que les $X_i$ sont :
- $X_0$ : représente la carte $V$ sur $\mathcal{MC}$,
- $X_1$ : représente une carte pour

$$X_0 \times_{\mathcal{MC}} X_0 := \{(x_0, x_1, \alpha) \text{ tels que } x_0, x_1 \in X_0 \text{ et } \alpha \text{ est une équivalence entre } x_0 \text{ et } x_1 \text{ et } d(\alpha) = 0\}$$

autrement dit

$$X_1 := \{(x_0, x_1, \alpha) \text{ avec } \alpha \in \mathcal{P}^0(x_0, x_1), d(\alpha) = 0 \text{ et } \alpha \text{ eq } \}$$

D'une manière analogue, on définit $X_2$ par

$$\begin{aligned} X_2 := \big\{&(x_0, x_1, x_2, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \alpha_{1,2}, \alpha_{0,1,2}) \text{ avec } \alpha_{i,j} \in \mathcal{P}^0(x_i, x_j), \alpha_{0,1,2} \in \mathcal{P}^{-1}(x_0, x_2), \\ &d(\alpha_{ij}) = 0 \text{ et } d(\alpha_{0,1,2}) = \alpha_{1,2}\alpha_{0,1} - \alpha_{0,2} \text{ ainsi que } (\alpha_{ij}) \text{ eq } \forall i < j; i,j \in \{0,1,2\}\big\}. \end{aligned}$$

On généralise cette construction pour $n$ quelconque par le nerf cohérent.

On considère un foncteur

$$\begin{array}{rcl} R : AlgCom_k & \to & dg - Cat \\ B & \mapsto & R(B) \end{array}$$

$R(B)$ est une catégorie différentielle graduée $B$-linéaire. On va appliquer ceci au foncteur

$$R(B) := \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}(B) = \mathcal{MC}(\mathcal{P} \otimes_k B)$$

mais ici on pourra travailler seulement avec $R$.

On a en particulier, le foncteur $ob(R) : AlgCom_k \to Ens$ et pour tout $B \in AlgCom_k$ , pour tout $x, y \in ob(R)(B)$ ;

$$R^i(x, y) : AlgCom_B \to Mod$$

où $Mod \to AlgCom_B$ est la catégorie fibrée de fibres sur $B'/B$, la catégorie des $B'$-modules.

$$R^i(x, y)(B') = R(B')(x/B', y/B')$$

**Hypothèses de représentabilité (REPR)**

1. Le foncteur $ob(R) : AlgCom_k \to Ens$ est représentable par un schéma $\underline{\mathrm{ob(R)}}$.
2. Pour tout $i$, le foncteur $R^i$ est représenté par un fibré vectoriel sur $ob(R) \times ob(R)$. C'est-à-dire : pour tout $X, Y : Spec(B) \to ob(R) \times ob(R)$ , alors $R^i(B)(X, Y)$ est l'ensemble des sections $\{R^i \leftarrow Spec(B) \to ob(R) \times ob(R)\}$

**Proposition 4.3.1** *Pour le cas $R(B) = MC(P \otimes_k B)$, les hypothèses de représentabilité sont vraies.*

Rappelons qu'on définit le nerf cohérent $NC$ d'une dg-catégorie qu'est un ensemble simplicial et en fait une quasi-catégorie. On compose avec le foncteur $R : AlgCom_k \to dg - Cat$ on obtient

$$\overline{X} := NC \circ R : AlgCom \to Ens^{\Delta^o}$$

qui donne pour tout $B \in AlgCom_k$ son image

$\overline{X}_n^{(B)} = \{\alpha \in NC(R(B)), \forall (X_0, ..., X_n) \in (ob(R(B)))^{n+1}, \forall 0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_k \leq n, \alpha(i_0, \cdots, i_k) \in \mathcal{A}^{1-k}(X_{i_0}, X_{i_k})$ qui satisfont aux conditions ci-dessous $\}$

**NC(i)** si $i_j = i_{j+1}$ alors $\alpha(i_0, \cdots, i_j, i_{j+1}, \cdots, i_k) = 0$. Sauf pour le cas où $k = 1$ qui donne $\alpha(i, i) = 1_{X_i}$ l'identité sur $X_i$.

**NC(ii)**

$$d(\alpha(i_0, \cdots, i_n)) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha(i_j, ..., i_n)\alpha(i_0, ..., i_j) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \alpha(i_0, ..., \hat{i}_j, ..., i_n)$$

**Proposition 4.3.2** *Si $R$ satisfait (REPR) alors, $\overline{X}_n$ est représentable par un schéma ( de type fini sur k).*

On a maintenant un schéma simplicial $\overline{X} : AlgCom_k \to Ens^{\Delta^o}$ , si $\overline{X}_n$ est représenté par un schéma.

## 4.4 La condition de quasi-isomorphisme est ouverte

**Proposition 4.4.1** *Soit $X$ un schéma et $f : E^{\cdot} \to F^{\cdot}$ un morphisme de complexes parfaits sur $X$. La condition que $f$ soit un quasi-isomorphisme est représentée par un ouvert $U \subset X$. Autrement dit, pour tout morphisme de schémas $j : S \to X$, le morphisme $Lg^*(f) : Lg^*E^{\cdot} \to Lg^*F^{\cdot}$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $g$ se factorise par $S \to U$.*

### Preuve

Soit $C^{\cdot}$ le cône de $f$ avec $C^i = E^{i+1} \oplus F^i$ avec la différentielle $d_C$ qui combine $d_E$, $d_E$ et $f$. On a que $Lg^*(f)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $Lg^*(C^{\cdot})$ est exacte. L'ouvert $U$ est le complémentaire du support de la cohomologie de $C^{\cdot}$, ce qui est un fermé par la théorie de la semi-continuité, puisque $C^{\cdot}$ est un complexe parfait.▲

### Modification

On va modifier les conditions de sorte que les $\alpha$ soient des équivalences. Un morphisme est une équivalence s'il admet des inverses à droite et à gauche à homotpie près.

**Définition 4.4.2** *Soient $Y, Z \in ob(R(B))$ et $f \in R(B)^0(Y, Z)$ avec $d(f) = 0$. On dit que $f$ est localement une équivalence s'il existe un revêtement étale $Spec(B') \to Spec(B)$ tel que $f_{B'} \in R(B')^0(Y_{B'}, Z_{B'})$ est une équivalence.*

**Lemme 4.4.3** *Soient $Y, Z \in ob(R(B))$ et $f \in R(B)^0(Y, Z)$ avec $d(f) = 0$. Alors $f$ est une équivalence si et seulement si les morphismes des compositions*

$$c(f)_{B'} : R(B')(Z_{B'}, Y_{B'}) \to R(B')(Z_{B'}, Z_{B'}), \qquad c'(f)_{B'} : R(B')(Z_{B'}, Y_{B'}) \to R(B')(Y_{B'}, Y_{B'})$$

*sont des quasi-isomorphismes de complexes de faisceaux sur le site $Aff_B$.*

### Preuve :

Si $f$ est localement une équivalence, alors il est facile de voir que les $c(f)$ et $c'(f)$ sont des quasi-isomorphismes, car avec l'inverse à homotopie prés on obtient l'inverse stricte sur la cohomologie.

Supposons que $c(f)$ est un quasi-isomorphisme, l'élément $[1_Z] \in H^0(R(B)(Z, Z))$ l'identité $Z$ est dans l'image faisceautique de

$$c(f) : H^0(R(-)(Z, Y)) \to H^0(R(-)(Z, Z)).$$

Ce qui veut dire qu'il existe un revêtement étale $Spec(B') \to Spec(B)$ et un élément $[g] \in H^0(R(B')(Z, Y))$ tels que $c(f)[g] = [f \circ g] = [1_Z]$. Le morphisme $g$ est l'inverse local à droite de $f$ à homotopie près. L'inverse local à gauche à homotopie près se trouve avec l'hypothèse que $c'(f)$ est un quasi-isomorphisme. On conclut que $f$ est localement une équivalence. ▲

On définit ainsi le sous-ensemble simplicial $NC^*(\mathcal{A}) \subset NC(\mathcal{A})$ par :

$NC^*(\mathcal{A})_n = \{(X_0, ..., X_n; \alpha)$ tels que $\forall i_0 \leq i_1, \quad \alpha(i_0, i_1) \in \mathcal{A}^0(X_{i_0}, X_{i_1})$ est une équivalence $\}$.

**Proposition 4.4.4** *Si $R$ satisfait (REPR), alors il existe un sous schéma simplicial ouvert $X$ de $\overline{X}$ qui représente localement le foncteur $NC^* \circ R(B)$, c'est-à-dire que pour tout $n$ :*

$$X_n(B) \subset NC_n(R(B)) = \overline{X}_n(B)$$

*est le sous ensemble d'éléments de $NC_n(R(B))$ pour qui il existe un revêtement étale $B \to B'$ tel que leurs restrictions sont dans $NC^*_n(R(B'))$.*

**Preuve :**

On combine la proposition 4.4.1 et le lemme 4.4.3. Notons que les complexes en question sont des complexes parfaits à cause de la condition $(REPR)$, pour la finitude il s'agit des $H^0$ donc il suffit de considérer des complexes restreins aux degrés $-1, 0$ et $1$.▲

# Chapitre 5

# Lissité formelle de la carte $V \to \mathcal{MC}$

Dans ce chapitre, on commence par une section dans la quelle on donne des techniques explicites pour démontrer la lissité artinienne de la carte

$$V \to Perf$$

du schéma d'Eisenbud-Buchsbaum $V$ vers le $n$-champ des complexes parfaits $Perf$. En se basant sur les mêmes techniques, on pose quelques hypothèses supplémentaires sur la dg-catégorie $\mathcal{P}$. On construira le $\mathcal{MC}$-préchamp $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$, on montrera qu'il est bien un $(n+1)$-champs en $(n+1)$-groupoïdes, et on termine par la démonstration que la carte

$$V \to \mathcal{MC}$$

est formellement lisse.

## 5.1 Lissité artinien de $V \to$ Perf

L'objectif dans cette section et de démontrer le théorème suivant

**Théorème 5.1.1** *Soit $B$ un anneau commutatif, $m$ un ideal maximal de $B$ et $I$ un autre ideal tel que $m.I = 0$. Soit $D$ un complexe de $B/I$-modules, tel que*

$$\forall i \qquad \exists r_i \in \mathbb{N}; \qquad D^i = (B/I)^{r_i}$$

*Soit $E^{\cdot}$ un complexe strictement parfait de longueur $n$, et soit un quasi-isomorphisme*

$$\phi : E \otimes_B B/I \to D$$

*alors il existe*

- *un complexe $F^{\cdot}$ de $B$-modules tel que*

$$\forall i \qquad \exists r_i \in \mathbb{N}; \qquad F^i = (B)^{r_i} \qquad et \qquad F \otimes_B B/I = D$$

– *un quasi-isomorphisme*

$$\psi : E \to F \qquad \textit{tel que} \quad \psi \otimes_B B/I = \phi$$

Dans la suite, on considère $B$ comme un anneau commutatif local et unitaire, $m$ l'idéale maximal de $B$, $I \subset m$ un idéale de $B$ et tel que $m.I = 0$.

Soit $D^{\cdot}$ le complexe

$$... \to D^{i-1} \to D^i \to D^{i+1} \to ...$$

tels que $\forall i \quad D^i$ est un $B/I$-module, et on suppose l'existence des $r_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$D^i \simeq (B/I)^{r_i} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Soit $E^{\cdot}$ un complexe strictement parfait des $B$-modules de longueur $n$

$$0 \to E^0 \to ... \to E^n \to 0$$

Par definition d'un complexe strictement parfait, on a pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ , il existe $s_i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$E^i \simeq B^{s_i}$$

On note que $s_i$ et $r_i$ sont différents en général. Soit le quasi-isomorphisme

$$\phi : E^{\cdot} \otimes_B B/I \underset{q.i}{\longrightarrow} D^{\cdot}$$

ce qui signéfie l'existence d'une famille d'isomorphisme $\phi_i$ tels que le diagramme suivant commute diagramm1

Et on cherche un complexe $F^{\cdot}$ de $B$-modules

$$... \to F^{i-1} \to F^i \to F^{i+1} \to ...$$

tel que

$$\forall i \quad \exists r_i ; \quad F^i = B^{r_i}$$

et

$$F^{\cdot} \otimes_B B/I = D^{\cdot}$$

c'est que signéfie

diagramme2

Et l'existence d'un quasi-isomorphisme

$$\psi : E \to F$$

et une homotopie $h$ entre $(\psi \otimes_B B/I)$ et $\phi$ ( ou même une égalité $(\psi \otimes_B B/I) = \phi$ )

Dans la suite, nous allons admetre les notations suivantes :

Soit $(E, d)$ un complexe donné par

$$... \to E^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \to ...$$

On note par

- $z^iE := Ker(d^i)$ le module des $i$-cycles au lieu de $Z^i$.
- $b^iE := Im(d^{i-1})$ le module des des $i$-bords au lieu de $B^i$.
- $h^iE := z^iE/b^iE$ le $i^{eme}$ groupe de cohomologie du complexe $E^{\cdot}$ au lieu de $H^i$.
- $y^iE := E^i/Ker(d^i)$ au lieu de $E^i/Z^i$.

alors on écrit ( cette écriture est valable seulement sur les corps)

$$\forall i \quad E^i = b^iE \oplus h^iE \oplus y^iE$$

Sur le complexe $D$, on note par $d_D$ les déffirentielles $d$ et on écrit

$$... \to D^{i-1} \xrightarrow{d_D^{i-1}} D^i \xrightarrow{d_D^i} D^{i+1} \to ...$$

avec $d_D^2 = d_D^i \circ d_D^{i-1} = 0$. Pour le complexe $F^{\cdot}$, les $F^i = B^{r_i}$ sont donnés et on choisit des déffirentielles préliminaires

$$d_{F,p} = d_D \text{ mod } I$$

et on écrit

$$... \to F^{i-1} \xrightarrow{d_{F,p}^{i-1}} F^i \xrightarrow{d_{F,p}^i} F^{i+1} \to ...$$

Le choix des $d_{F,p}$ est fait de sorte que leurs matrices soient des relèvements des matrices des $d_D$. En général

$$(d_{F,p})^2 = d_{F,p}^i \circ d_{F,p}^{i=1} \neq 0, \quad \forall i$$

mais

$$(d_{F,p}^i \circ d_{F,p}^{i-1}) \otimes B/I = 0$$

Puisque $m.I = 0$ on peut avoir le diagramme suivant

$$\begin{array}{cccc} (d_{F,p})^2 : & F^i & \to & F^{i+2} \otimes_B I \\ & \downarrow & \nearrow & \\ & F^i \otimes_B (B/m) & & \end{array}$$

mais

$$F^{i+2} \otimes_B I = (F^{i+2} \otimes_B (B/m)) \otimes_{B/m} I$$

donc nous pouvons supposer le morphisme préliminaire

$$\alpha_p : F^i \otimes_B (B/m) \to (F^{i+2} \otimes_B (B/m)) \otimes_{B/m} I \tag{5.1}$$

et on conclut par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (d_{F,p})^2 : & F^i & \xrightarrow{d_{F,p}^{i+1} \circ d_{F,p}^i} & F^{i+2} \otimes_B I \\ & \downarrow & \nearrow & \| \\ & F^i \otimes_B (B/m) & \xrightarrow{\alpha_p} & (F^{i+2} \otimes_B (B/m)) \otimes_{B/m} I \end{array}$$

On fixe un quasi-isomorphisme préliminaire

$$\psi_p : E \to F \qquad \text{avec } \psi_p = \phi \text{ modulo } I$$

et on définit une application $\beta_p$ par

$$\beta_p := (d_{F,p} \circ \psi_p + \psi_p \circ d_E) : E^i \otimes (B/m) \to (F^{i+1} \otimes (B/m)) \otimes I$$

Posons deux applications $\delta$ et $\xi$, et on définit les deux applications $d_{F,p} + \delta$ et $\psi_p + \xi$ où

$$d_F = d_{F,p} + \delta \qquad \text{et } \psi_F = \psi_p + \xi$$

$m$ est un idéal maximal, alors $V = B/m$ est un corps. L'action de $B$ sur $I$ se factorise à travers $B/m$ comme suivant :
soient $a$ et $b$ deux éléments de $B$ tels que $\dot{a} = \dot{b}$ dans $B/m$ (*ie* : $a = b$ modulo $m$), comme $mI = 0$ alors

$$\forall x \in I \quad a.x = b.x$$

cette action définit une loi extèrne qui donne une structure de $B/m$-module à $I$. mais $B/m$ est un corps ( on le note par $K$), alors $I$ est un $K$-espace vectoriel.

Dans la suite on va utiliser le résultat suivant

Si $I \subset m \subset B$ sont deux idéaux avec $m$ maximal dans l'anneau $B$, alors $m/I \subset B/I$ est un idéal maximal et donc $(B/I)/(m/I)$ est un corps $K$.

Nous avons

$$F \otimes_B B/I = D$$

alors

$$F \otimes_B B/I \otimes_{B/I} (B/I)/(m/I) = D \otimes_{B/I} (B/I)/(m/I)$$

or

$$B/I \otimes_{B/I} (B/I)/(m/I) = B/m$$

donc

$$F \otimes_B B/m = D \otimes_{B/I} (B/I)/(m/I)$$

mais $B/m$ et $(B/I)/(m/I)$ sont deux corps, donc sont égaux à isomorphisme prés. Alors

$$\forall i \quad D^i \otimes_{B/I} (B/I)/(m/I) = D^i/m$$

donc ( d'aprés les résultats qu'on a vu dans la section des suites de cohomologie le théorème 1.4.9)

$$\exists r_i \quad \text{tel que} \quad D^i \otimes_{B/I} (B/I)/(m/I) = D^i/m = K^{r_i}$$

et donc l'existence de la décomposition

$$\forall i \quad D^i/m = b^i(D/m) \oplus h^i(D/m) \oplus y^i(D/m)$$

Donc les applications $\alpha_p$ sont définies par

$$\begin{array}{ccc}
D^i/m & \xrightarrow{\alpha^{i,i+2}} & D^{i+2}/m \otimes_{B/m} I \\
\| & & \| \\
b^i(D/m) \oplus h^i(D/m) \oplus y^i(D/m) & \to & [b^{i+2}(D/m) \oplus h^{i+2}(D/m) \oplus y^{i+2}(D/m)] \otimes_{B/m} I
\end{array}$$

Donc la matrice associe à chaque $\alpha_p$ est donnée par

$$\alpha^{i;i+2} := \begin{pmatrix} b^i \to b^{i+2} & h^i \to b^{i+2} & y^i \to b^{i+2} \\ b^i \to h^{i+2} & h^i \to h^{i+2} & y^i \to h^{i+2} \\ b^i \to y^{i+2} & h^i \to y^{i+2} & y^i \to y^{i+2} \end{pmatrix}$$

que nous noterons dans la suite par

$$\alpha^{i;i+2} := \begin{pmatrix} \alpha_{b^i b^{i+2}} & \alpha_{h^i b^{i+2}} & \alpha_{y^i b^{i+2}} \\ \alpha_{b^i h^{i+2}} & \alpha_{h^i h^{i+2}} & \alpha_{y^i h^{i+2}} \\ \alpha_{b^i y^{i+2}} & \alpha_{h^i y^{i+2}} & \alpha_{y^i y^{i+2}} \end{pmatrix}$$

et la matrice associe à $d_{D/m}$ est donnée par

$$d_{D/m} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la suite nous allons utiliser le résultat

$$\forall i \quad d.\alpha^{i,i+2} = \alpha^{i+1,i+3}.d \tag{5.2}$$

ce résultat est vrais car d'aprés notre construction de départ pour $d = d_{F,p}$ et $\alpha = \alpha_p$ on a

$$\begin{aligned} (d_{F,p})^3 &= d_{F,p}.(d_{F,p})^2 = d_{D/m}.\alpha_p \\ &= (d_{F,p})^2.d_{F,p} = \alpha_p.d_{D/m} \end{aligned}$$

car

$$\alpha = 0 \bmod I \qquad \text{et} \qquad d_{F,p}.\alpha = d_{D/m}.I$$

donc

$$d_{D/m}.\alpha_p = \alpha_p.d_{D/m}.$$

On a

$$\begin{aligned} d_{D/m}.\alpha^{i,i+2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{b^i b^{i+2}} & \alpha_{h^i b^{i+2}} & \alpha_{y^i b^{i+2}} \\ \alpha_{b^i h^{i+2}} & \alpha_{h^i h^{i+2}} & \alpha_{y^i h^{i+2}} \\ \alpha_{b^i y^{i+2}} & \alpha_{h^i y^{i+2}} & \alpha_{y^i y^{i+2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{b^i y^{i+2}} & \alpha_{h^i y^{i+2}} & \alpha_{y^i y^{i+2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha^{i+1,i+3}.d_{D/m} &= \begin{pmatrix} \alpha_{b^{i+1} b^{i+3}} & \alpha_{h^{i+1} b^{i+3}} & \alpha_{y^{i+1} b^{i+3}} \\ \alpha_{b^{i+1} h^{i+3}} & \alpha_{h^{i+1} h^{i+3}} & \alpha_{y^{i+1} h^{i+3}} \\ \alpha_{b^{i+1} y^{i+3}} & \alpha_{h^{i+1} y^{i+3}} & \alpha_{y^{i+1} y^{i+3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{b^{i+1} b^{i+3}} \\ 0 & 0 & \alpha_{b^{i+1} h^{i+3}} \\ 0 & 0 & \alpha_{b^{i+1} y^{i+3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le système d'équations

$$d_{D/m}.\alpha^{i,i+2} = \alpha^{i+1,i+3}.d_{D/m}$$

donne $\forall i$

$$\alpha_{b^i y^{i+2}} = 0, \quad \alpha_{h^i y^{i+2}} = 0, \quad \alpha_{b^i h^{i+2}} = 0, \tag{5.3}$$

et

$$\alpha_{y^i y^{i+2}} = \alpha_{b^{i+1} b^{i+3}} \tag{5.4}$$

via l'identification

$$\forall i \quad y^i = b^{i+1} \quad \text{ ie } y^i(D/m) = b^{i+1}(D/m)$$

Maintenant, on fait un choix préliminaire de différentielle

$$d_{F,p} : F^i \to F^{i+1}$$

tel que $d_{F,p}/I = d_D$. Ce choix est bien possible. On va ajouter l'application (dit de perturbation) $\delta$ à $d_{F,p}$ de sorte que $d_F = d_{F,p} + \delta$ et

$$\delta : F^i \to I \otimes_B F^{i+1}$$

est un morphisme des $B$-modules tel que $\delta(\epsilon x) = \epsilon.\delta(x) = 0$
Ça signifie qu'on peut factoriser $\delta$ comme suit :

$$\begin{array}{cccc} \delta : & F^i & \to & I \otimes_B F^{i+1} \\ & \downarrow & & \| \\ & F^i \otimes_B B/m & \to & F^{i+1} \otimes_B K \otimes_K I \end{array}$$

car $B/m = k$ est un corps
On a

$$I.F^{i+1} \subset F^{i+1} \quad \forall i$$

comme $F^i$ est un $B$-module libre, alors on a vu qu'il existe un $r_i$ tel que $F^i \cong B^{r_i}$ donc

$$I.F^i \cong I.B^{r_i} = I^{r_i} = I \otimes_B B^{r_i} \cong I \otimes_B F^i$$

alors on a l'isomorphisme

$$I \otimes_B F^{i+1} \to I.F^{i+1}$$

Comme nous avons fait avant, nous cherchons à obtenir le fait que

$$(d_F)^2 = \alpha_F = 0$$

avec le calcul suivant :

$$\alpha_F = (d_F)^2 = (d_{E,p} + \delta)^2 = d_{F,p}^2 + d_{F,p}.\delta^{i,i+1} + \delta^{i+1,i+2}.d_{F,p} + \delta^2$$

Or,

$$d_{F,p}^2 = \alpha_p$$

est la quantité considérée ci-dessus, voir les equations (5.3), (5.4).

D'autre part,

$$\delta^2 = 0 \quad \text{car } I^2 = 0$$

et

$$d_{F,p}.\delta^{i,i+1} + \delta^{i+1,i+2}.d_{F,p} = d_{D/m}.\delta^{i,i+1} + \delta^{i+1,i+2}.d_{D/m}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} d_{D/m}.\delta^{i,i+1} + \delta^{i+1,i+2}.d_{D/m} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{b^i b^{i+1}} & \delta_{h^i b^{i+1}} & \delta_{y^i b^{i+1}} \\ \delta_{b^i h^{i+1}} & \delta_{h^i h^{i+1}} & \delta_{y^i h^{i+1}} \\ \delta_{b^i y^{i+1}} & \delta_{h^i y^{i+1}} & \delta_{y^i y^{i+1}} \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} \delta_{b^{i+1} b^{i+2}} & \delta_{h^{i+1} b^{i+2}} & \delta_{y^{i+1} b^{i+2}} \\ \delta_{b^{i+1} h^{i+2}} & \delta_{h^{i+1} h^{i+2}} & \delta_{y^{i+1} h^{i+2}} \\ \delta_{b^{i+1} y^{i+2}} & \delta_{h^{i+1} y^{i+2}} & \delta_{y^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \delta_{b^i y^{i+1}} & \delta_{h^i y^{i+1}} & \delta_{y^i y^{i+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{b^{i+1} b^{i+2}} \\ 0 & 0 & \delta_{b^{i+1} h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \delta_{b^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \delta_{b^i y^{i+1}} & \delta_{h^i y^{i+1}} & \delta_{y^i y^{i+1}} + \delta_{b^{i+1} b^{i+2}} \\ 0 & 0 & \delta_{b^{i+1} h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \delta_{b^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque ici que les termes en haut à gauche et en bas à droite sont les mêmes, mais avec un décalage de l'indice $i$. Cette identification ne posera pas de problème au vu de l'equation (5.4) qui donne la même identité pour $\alpha_p$.

Le seul terme de $\alpha_p$ qu'on n'arrive pas à annuler ainsi est celui du milieu $\alpha_{h,h}$ ; c'est pour cette raison que nous donnons maintenant un argument pour prouver que $\alpha_{h,h} = 0$.

Maintenant, soit $\psi_p : E^i \to F^i$ un choix préliminaire tel que $(\psi_p) \otimes_B B/I = \phi$ où

$$\phi : E \otimes_B B/I \to F \otimes_B B/I$$

avce $d\phi = \phi d$. Définissons l'application $\beta_p = d_{F,p}\psi_p - \psi_p d_E$ autrement dit

$$\begin{array}{cccc} \beta_p : & E^i & \to & F^{i+1} \otimes_B I \\ & \downarrow & & \| \\ & E^i/m & \xrightarrow{\beta_p} & F^{i+1}/m \otimes_K I \end{array}$$

On cherchera ultérieurement à modifier $\psi$ pour obtenir que $\beta = 0$. Pour l'instant on a :

$$\begin{aligned} \alpha_p.\psi_p = d^2_{F,p}.\psi_p = & \; d_{F,p}.(\psi_p.d_E + \beta_p) \\ = & \; [(\psi_p.d_E + \beta_p).d_E] + d_{F,p}.\beta_p \\ = & \; \beta_p.d_E + d_{F,p}.\beta_p \\ = & \; \beta_p d_{E/m} + d_{D/m}.\beta_p \end{aligned}$$

Notons par contre que $m.\alpha_p = 0$ donc

$$\alpha_p.\psi_p = \alpha_p.(\phi/m).$$

La transformation $\phi/m$ ne concerne que des complexes sur le corps $K = A/m$, et on peut écrire matriciellement

$$(\phi/m)^i = \begin{pmatrix} (\phi/m)_{b^ib^i} & (\phi/m)_{h^ib^i} & (\phi/m)_{y^ib^i} \\ (\phi/m)_{b^ih^i} & (\phi/m)_{h^ih^i} & (\phi/m)_{y^ih^i} \\ (\phi/m)_{b^iy^i} & (\phi/m)_{h^iy^i} & (\phi/m)_{y^iy^i} \end{pmatrix}.$$

Les termes autres qu'au milieu sont des matrices en principe seulement rectangulaires (car $r_i \neq s_i$). D'autre part $\phi/m$ est un morphisme de complexes :

$$d_{F/m}.(\phi/m) = (\phi/m).d_{E/m},$$

ce qui entraine (tout comme pour les equations (5.3)) que

$$(\phi/m)_{b^iy^i} = 0, \qquad (\phi/m)_{h^iy^i} = 0, \qquad (\phi/m)_{b^ih^i} = 0.$$

Le terme du milieu $(\phi/m)_{h^ih^i}$ représente le morphisme induit sur la cohomologie

$$H(\phi/m) : H^i(E/m) \to H^i(F/m).$$

Or nous travaillons sous l'hypothèse que $\phi$ est un quasi-isomorphisme. D'où la même chose pour $\phi/m$, donc $(\phi/m)_{h^ih^i}$ est un isomorphisme entre $h^iE/m$ et $h^iF/m$.

Avec les equations (5.3) et (5.5) on peut multiplier

$$\begin{aligned} \alpha^{i,i+2}.(\phi/m)^i &= \begin{pmatrix} \alpha_{b^ib^{i+2}} & \alpha_{h^ib^{i+2}} & \alpha_{y^ib^{i+2}} \\ 0 & \alpha_{h^ih^{i+2}} & \alpha_{y^ih^{i+2}} \\ 0 & 0 & \alpha_{y^iy^{i+2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\phi/m)_{b^ib^i} & (\phi/m)_{h^ib^i} & (\phi/m)_{y^ib^i} \\ 0 & (\phi/m)_{h^ih^i} & (\phi/m)_{y^ih^i} \\ 0 & 0 & (\phi/m)_{y^iy^i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha_{b^ib^{i+2}}).(\phi/m)_{b^ib^i} & * & * \\ 0 & (\alpha_{h^ih^{i+2}}).(\phi/m)_{h^ih^i} & * \\ 0 & 0 & (\alpha_{y^iy^{i+2}}).(\phi/m)_{y^iy^i} \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Maintenant on va exprimer la quantité $d_{E/m}.\beta_p + \beta_p.d_{D/m}$ matriciellement

$$d_{D/m}.\beta^{i,i+1} + \beta^{i+1,i+2}.d_{F,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{b^i b^{i+1}} & \beta_{h^i b^{i+1}} & \beta_{y^i b^{i+1}} \\ \beta_{b^i h^{i+1}} & \beta_{h^i h^{i+1}} & \beta_{y^i h^{i+1}} \\ \beta_{b^i y^{i+1}} & \beta_{h^i y^{i+1}} & \beta_{y^i y^{i+1}} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \beta_{b^{i+1} b^{i+2}} & \beta_{h^{i+1} b^{i+2}} & \beta_{y^{i+1} b^{i+2}} \\ \beta_{b^{i+1} h^{i+2}} & \beta_{h^{i+1} h^{i+2}} & \beta_{y^{i+1} h^{i+2}} \\ \beta_{b^{i+1} y^{i+2}} & \beta_{h^{i+1} y^{i+2}} & \beta_{y^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{b^i y^{i+1}} & \beta_{h^i y^{i+1}} & \beta_{y^i b^{i+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{b^{i+1} b^{i+2}} \\ 0 & 0 & \beta_{b^{i+1} h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \beta_{b^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{b^i y^{i+1}} & \beta_{h^i y^{i+1}} & \beta_{y^i b^{i+1}} + \beta_{b^{i+1} b^{i+2}} \\ 0 & 0 & \beta_{b^{i+1} h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \beta_{b^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix}$$

Donc on a une égalité entre les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} \beta_{b^i y^{i+1}} & \beta_{h^i y^{i+1}} & \beta_{y^i b^{i+1}} + \beta_{b^{i+1} b^{i+2}} \\ 0 & 0 & \beta_{b^{i+1} h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \beta_{b^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha_{b^i b^{i+2}}).(\phi/m)_{b^i b^i} & * & * \\ 0 & (\alpha_{h^i h^{i+2}}).(\phi/m)_{h^i h^i} & * \\ 0 & 0 & (\alpha_{y^i y^{i+2}}).(\phi/m)_{y^i y^i} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$(\alpha_{h^i h^{i+2}}).(\phi/m)_{h^i h^i} = 0,$$

comme $(\phi/m)_{h^i h^i}$ est un isomorphisme, il est bijectif, donc inversible. Soit $T$ son inverse, alors

$$(\alpha_{h^i h^{i+2}}).(\phi/m)_{h^i h^i}.T = 0.T = 0,$$

mais $(\phi/m)_{h^i h^i}.T = 1$ donc

$$(\alpha_{h^i h^{i+2}}) = 0$$

On peut donc choisir des parametres pour $\delta$ en fonction de $\alpha_p$ pour que $\alpha_F = 0$. D'apres l'equation

$$\alpha_F = \alpha_p + d_{F,p}.\delta^{i,i+1} + \delta^{i+1,i+2}.d_{F,p} = 0$$

et par le calcul matriciel qu'on à fait avant, on trouve

$$\alpha_F = \begin{pmatrix} \alpha_{b^i b^{i+2}} & \alpha_{h^i b^{i+2}} & \alpha_{y^i b^{i+2}} \\ 0 & \alpha_{h^i h^{i+2}} & \alpha_{y^i h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \alpha_{y^i y^{i+2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{b^i y^{i+1}} & \delta_{h^i y^{i+1}} & \delta_{y^i b^{i+1}} + \delta_{b^{i+1} b^{i+2}} \\ 0 & 0 & \delta_{b^{i+1} h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \delta_{b^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix} = 0$$

donc les parametres fixes sont :

$$\begin{aligned}
\delta_{b^i y^{i+1}} &= -\alpha_{b^i b^{i+2}} && (5.5)\\
\delta_{h^i y^{i+1}} &= -\alpha_{h^i b^{i+2}} && (5.6)\\
\delta_{b^{i+1} h^{i+2}} &= -\alpha_{y^i h^{i+2}} && (5.7)\\
\delta_{b^{i+1} y^{i+2}} &= -\alpha_{y^i y^{i+2}} && (5.8)
\end{aligned}$$

et un paramétrisé par l'equation

$$\delta_{y^i b^{i+1}} = -(\delta_{b^{i+1} b^{i+2}} + \alpha_{y^i b^{i+2}}) \tag{5.9}$$

On remarque que les equations (5.5) et (5.8) definissent la même parametre avec décalage de $i$, car elles sont compatibles d'aprés (5.4)

Donc le choix des $\delta$ pour que $\alpha_F = 0$ peut être comme suivant ( ce choix n'est pas unique, car il y'as des parametres fixes en fonction de $\alpha_p$ et d'autres libres)

$$\delta^{i,i+1} = \begin{pmatrix} \delta_{b^i b^{i+1}} & \delta_{h^i b^{i+1}} & \delta_{y^i b^{i+1}} \\ -\alpha_{y^{i-1} h^{i+1}} & \delta_{h^i h^{i+1}} & \delta_{y^i h^{i+1}} \\ -\alpha_{b^i b^{i+2}} & -\alpha_{h^i b^{i+1}} & -\delta_{b^i b^{i+1}} - \alpha_{y^i, b^{i+2}} \end{pmatrix} \qquad \forall i$$

avec le terme en haut à droite depond de premier terme à gauche $\delta_{b^i b^{i+1}}$ et de $\alpha_{y^i, b^{i+2}}$

Maintenant on fait les mêmes démarches de travail pour

$$\begin{aligned}
\beta' &= d_F \psi - \psi d_E \\
&= (d_{F,p} + \delta)(\psi_p + \xi) - (\psi_p + \xi) d_E \\
&= d_{F,p}\psi_p - \psi_p d_E + d_{F,p}\xi + \delta\psi_p - \xi d_E \\
&= \beta_p + d_{F/m}\xi - \xi d_E + \delta\psi_p \\
&= \beta_p + d_{F/m}\xi - \xi d_E + \delta\phi/m
\end{aligned}$$

On calcul donc

$$\begin{aligned}
\beta' = & \begin{pmatrix} \beta_{b^i b^{i+1}} & \beta_{h^i b^{i+1}} & \beta_{y^i b^{i+1}} \\ \beta_{b^i h^{i+1}} & \beta_{h^i h^{i+1}} & \beta_{y^i h^{i+1}} \\ \beta_{b^i y^{i+1}} & \beta_{h^i y^{i+1}} & \beta_{y^i y^{i+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{b^i y^{i+1}} & \xi_{h^i y^{i+1}} & \xi_{y^i b^{i+1}} + \xi_{b^{i+1} b^{i+2}} \\ 0 & 0 & \xi_{b^{i+1} h^{i+2}} \\ 0 & 0 & \xi_{b^{i+1} y^{i+2}} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \delta_{b^i b^{i+1}} & \delta_{h^i b^{i+1}} & \delta_{y^i b^{i+1}} \\ -\alpha_{y^{i-1} h^{i+1}} & \delta_{h^i h^{i+1}} & \delta_{y^i h^{i+1}} \\ -\alpha_{b^i b^{i+2}} & -\alpha_{h^i b^{i+1}} & -\delta_{b^i b^{i+1}} - \alpha_{y^i, b^{i+2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\phi/m)_{b^i b^i} & (\phi/m)_{h^i b^i} & (\phi/m)_{y^i b^i} \\ 0 & (\phi/m)_{h^i h^i} & (\phi/m)_{y^i h^i} \\ 0 & 0 & (\phi/m)_{y^i y^i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On veut que le terme du milieu de la matrice de $\beta'$ soit nul ($\beta'_{h,h} = 0$), autrement dit :

$$\beta'_{h,h} = \beta_{h^i, h^{i+1}} - \alpha_{y^{i-1} h^{i+1}} (\phi/m)_{h^i b^i} + \delta_{h^i h^{i+1}} (\phi/m)_{h^i h^i} = 0.$$

Comme $\phi/m_{h^i, h^{i+1}}$ est un isomorphisme, donc bijectif, alors il est inversible, et soit $T$ son inverse, alors

$$\beta_{h^i, h^{i+1}} T - \alpha_{y^{i-1} h^{i+1}} (\phi/m)_{h^i b^i} T + \delta_{h^i h^{i+1}} (\phi/m)_{h^i h^i} T = 0$$

or

$$(\phi/m)_{h^i h^i} T = 1$$

donc on doit choisir

$$\delta_{h^i h^{i+1}} = (\alpha_{y^{i-1}h^{i+1}}(\phi/m)_{h^i b^i} - \beta_{h^i, h^{i+1}})T$$

et la matrice de $\delta$ sera

$$\delta^{i,i+1} = \begin{pmatrix} \delta_{b^i b^{i+1}} & \delta_{h^i b^{i+1}} & \delta_{y^i b^{i+1}} \\ -\alpha_{y^{i-1}h^{i+1}} & (\alpha_{y^{i-1}h^{i+1}}(\phi/m)_{h^i b^i} - \beta_{h^i, h^{i+1}})T & \delta_{y^i h^{i+1}} \\ -\alpha_{b^i b^{i+2}} & -\alpha_{h^i b^{i+1}} & -\delta_{b^i b^{i+1}} - \alpha_{y^i, b^{i+2}} \end{pmatrix} \quad \forall i$$

pour que

$$\beta'_{h,h} = 0 \tag{5.10}$$

Mainetenent on cherche à démontrer que $d\beta' + \beta' d = 0$, on a

$$\beta' = d\psi - \psi d$$

donc

$$\begin{array}{rcl} d\beta' + \beta' d & = & d(d\psi - \psi d) - (d\psi - \psi d)d \\ & = & d^2\psi - d\psi d - d\psi d + psid^2 \\ & = & d^2\psi + \psi d^2 \end{array}$$

or $d^2 = 0$ par hypothèses, donc

$$d\beta' + \beta' d = 0$$

En faisant les mêmes démarches de travail que pour trouver (5.3) et (5.4) pour $\alpha$, et après des calculs analogues, on trouve les équations

$$\beta'_{b^i y^{i+2}} = 0, \quad \beta'_{h^i y^{i+2}} = 0, \quad \beta'_{b^i h^{i+2}} = 0, \tag{5.11}$$

et

$$\beta'_{y^i y^{i+2}} = \beta'_{b^{i+1} b^{i+3}} \tag{5.12}$$

et par les équations (5.10), (5.11) et (5.12) nous pouvons faire un choix de $\xi$ pour que $\beta' = 0$.

On a fini la construction du complexe $F^{\cdot}$ et du morphisme $\psi$ , on voit que $\psi$ est un quasi-isomorphisme a cause de la proprité $\psi/I = \phi$.

## 5.2 Hypothèses sur une dg-catégorie

Soit $k$ un corps algébriquement clôs de caractéristique nul. On fixera par la suite une $dg$-catégorie $k$-linéaire $\mathcal{P}$ qui satisfait aux hypothèses suivantes :

1. L'ensemble des objets $Ob(\mathcal{P})$ est fini.
2. Pour tout $E, F \in Ob(\mathcal{P})$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\quad \mathcal{P}^i(E, F)$ est un $k$-espace vectoriel de dimension fini.

3. Il existe un indice $n > 0$ tel que pour tout $i < -n$, le $k$-espace vectoriel $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$.

**Remarque 5.2.1** Si $\mathcal{P}^{\cdot}(E, F)$ est un complexe strictement parfait sur $k$, alors les hypothèses 2 et 3 sont assurées, et pour l'hypothèse 3 on peut juste dire qu'il existe un $n$ tel que $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$, pour $\mid i \mid > n$ (c'est-à-dire : $i \notin [-n, n]$).

## 5.3 Le $\mathcal{MC}$-préchamps

Soit $k$ un corps. On fixe une dg-catégorie $k$-linéaire $\mathcal{P}$ qui satisfait aux hypothèses ci-dessus.

Pour tout $k$-algèbre $B$, on définit une $B-dg$-catégorie $\mathcal{P} \otimes_k B$ telle que

$$Ob(\mathcal{P} \otimes_k B) = ob(\mathcal{P})$$

et

$$\forall E, F \in ob(\mathcal{P} \otimes_k B) : \quad (\mathcal{P} \otimes_k B)(E, F) := \mathcal{P}(E, F) \otimes_k B$$

On pose

$$\mathcal{MC_P}^{dg}(B) := MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$$
$$\mathcal{MC_P}^{(\infty,1)}(B) := [\mathcal{MC_P}^{dg}(B)]^{(\infty,1)}$$
$$\mathcal{MC_P}^{es}(B) := [\mathcal{MC_P}^{(\infty,1)}(B)]^{es}$$

et on définit $\mathcal{MC_P}$ comme le $\infty$-champs associé à l'$\infty$-préchamps $\mathcal{MC_P}^{es}$.

On note que la condition 3 de l'hypothèse, qui s'applique aussi aux $\mathcal{P} \otimes_k B$, implique que $\mathcal{MC_P}^{(\infty,1)}$ est en fait un $(n+1, 1)$-préchamps, donc $\mathcal{MC_P}$ est un $(n+1)$-champs de $(n+1)$-groupoïdes.

Ici $\mathcal{MC_P}^{(\infty,1)}$ peut être défini par l'application de la construction Dold-Puppe $DP(\mathcal{MC_P})$ ou par l'application du nerf cohérent $NC(\mathcal{MC_P})$. On a déjà vu dans la section 3.4 qu'il existe une connexion

$$DP(\mathcal{MC_P}) \leftrightarrow NC(\mathcal{MC_P}).$$

Donc on peut conclure que

$$\mathcal{MC_P}^{(\infty,0)} = NC^*(\mathcal{MC_P}).$$

On note ici que $\mathcal{MC_P}^{(\infty,0)} = \mathcal{MC_P}^{es}$ , c'est la $(\infty, 0)$-catégorie intérieur de la catégorie $\mathcal{MC_P}^{(\infty,1)}$. Pour plus de clarté voir la définition 2.1.21.

## 5.4 Lissité formelle

Soit $B$ un anneau commutatif et $I$ un idéal de $B$ tel que $I^2 = 0$. Supposons que $(F, \zeta_I)$ est un objet de la dg-catégorie $MC(\mathcal{P} \otimes_k B/I)$ et $(E, \eta)$ un objet de la dg-catégorie $MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$.

Considérons deux morphismes de MC-objets $a_I$ et $\alpha_I$ comme suivant :

$$(F, \zeta_I) \quad : \quad \underset{a_I}{\overset{\alpha_I}{\rightleftarrows}} \quad : \quad (E, \eta_I := \eta \otimes_B B/I)$$

tels que $a_I$ et $\alpha_I$ sont inverses dans$H^0(MC(\mathcal{P} \otimes_k B/I))$.

On choisit un relèvement (modulo $I$) :

$$(F, \zeta) \quad : \quad \underset{a}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \quad : \quad (E, \eta)$$

tels que $\zeta_I := \zeta \otimes_B B/I$ et où $a$ et $\alpha$ se réduisent à $a_I$ et $\alpha_I$ modulo $I$ et les compositions $\alpha.a$ et $a.\alpha$ sont données par :

$$\alpha.a = 1 + d_{\eta,\eta}(g) + u = 1 + \eta g + g\eta + u; \quad u \in \mathcal{P}^0(E, E).I \tag{5.13}$$

$$a.\alpha = 1 + d_{\zeta,\zeta}(h) + v = 1 + \zeta h + h\zeta + v; \quad v \in \mathcal{P}^0(F, F).I \tag{5.14}$$

On note que $(F, \zeta)$ sera un objet de la dg-catégorie $MC(\mathcal{P} \otimes B)$, si

$$d(\zeta) + \zeta^2 = 0,$$

mais nous ne pouvons pas savoir cela *a priori*. On cherche donc à modifier $\zeta$.

On pose

$$\theta = \zeta + \varepsilon; \qquad \varepsilon^2 = 0 \tag{5.15}$$

$$d(\zeta) + \zeta^2 = \varphi \in P^2(F, F).I \tag{5.16}$$

d'aprés 5.15 on trouve

$$\begin{aligned} d(\theta) + \theta^2 &= d(\zeta) + \zeta^2 + d(\varepsilon) + \zeta\varepsilon + \varepsilon\zeta \\ &= \varphi + d(\varepsilon) + \zeta\varepsilon + \varepsilon\zeta \\ &= \varphi + d_{\zeta\zeta}(\varepsilon) \end{aligned}$$

On a $d_{\zeta_I\eta_I}(\alpha_I) = 0$, on pose $\gamma =: d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta \in \mathcal{P}^1(F, E).I$, on applique $d_{\zeta_I\eta_I}$ sur $\gamma$

$$\begin{aligned} d_{\zeta_I\eta_I}(\gamma) &= d(\gamma) + \eta\gamma + \gamma\zeta \\ &= d(d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta) + \eta(d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta) + (d(\alpha) + \eta\alpha - \alpha\zeta)\zeta \\ &= d^2(\alpha) + d(\eta\alpha) - d(\alpha\zeta) + \eta d(\alpha) + \eta^2\alpha - \eta\alpha\zeta + d(\alpha)\zeta + \eta\alpha\zeta - \alpha\zeta^2 \\ &= d(\eta)\alpha - \eta d(\alpha) - d(\alpha)\zeta - \alpha d(\zeta) + \eta d(\alpha) + \eta^2\alpha - \eta\alpha\zeta + d(\alpha)\zeta + \eta\alpha\zeta - \alpha\zeta^2 \\ &= (d(\eta) + \eta^2)\alpha - \alpha(d(\zeta) + \zeta^2) \\ &= -\alpha\varphi \end{aligned}$$

Donc on a

$$d_{\zeta_I\eta_I}(\gamma) = -\alpha_I\varphi \tag{5.17}$$

on calcule aussi

$$\begin{aligned} d_{\zeta_I\zeta_I}(a_I\gamma) &= d_{\eta_I\zeta_I}(a_I)\gamma + a_I d_{\zeta_I\zeta_I}(\gamma) \\ &= -a_I\alpha_I\varphi \\ &= -(1+d_{\zeta\zeta}(h))\varphi \end{aligned}$$

or l'identité de Bianchi montre que $d_{\zeta\zeta}(\varphi)=0$ et on a

$$\begin{aligned} d_{\zeta\zeta}(h\varphi) &= d_{\zeta\zeta}(h)\varphi + hd_{\zeta\zeta}(\varphi) \\ &= d_{\zeta\zeta}(h)\varphi \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} d_{\zeta_I\zeta_I}(a_I\gamma) &= d_{\eta_I\zeta_I}(a_I)\gamma + a_I d_{\zeta_I\zeta_I}(\gamma) \\ &= -(1+d_{\zeta\zeta}(h))\varphi \\ &= -\varphi - d_{\zeta\zeta}(h)\varphi \\ &= -\varphi - d_{\zeta\zeta}(h\varphi) \end{aligned}$$

et donc

$$\varphi = -(d_{\zeta\zeta}(a\gamma) + d_{\zeta\zeta}(h\varphi))$$

dans ce cas, on choisit $\varepsilon = a\gamma + h\varphi$.

Etape2 : En remplaçant $\zeta$ par $\theta$, nous pouvons supposer que $d(\zeta)+\zeta^2=0$, par conséquent $d^2_{\zeta\eta}(\varepsilon)=0$

On modifie $\zeta$ et $\alpha$ de sorte que $d_{\zeta\eta}(\alpha)=0$ et $d^2_{\zeta\eta}=0$.

On note par $\omega := d_{\zeta\eta}(\alpha) = d(\alpha)+\eta\alpha-\alpha\zeta$ alors $d_{\zeta\eta}(\omega)=0$

On pose $\theta=\zeta+\varepsilon'$ pour un $\varepsilon'$ choisi de sorte que $d_{\zeta\zeta}(\varepsilon')=0$, donc on a bien

$$d(\theta)+\theta^2 = d(\zeta)+\zeta^2+d_{\zeta\zeta}(\varepsilon')=0$$

donc

$$\begin{aligned} d_{\theta\eta}(\alpha) &= d_{(\zeta+\varepsilon')\eta}(\alpha) \\ &= d(\alpha)+\eta\alpha+\alpha(\zeta+\varepsilon') \\ &= d(\alpha)+\eta\alpha+\alpha\zeta+\alpha\varepsilon' \\ &= (d(\alpha)+\eta\alpha+\alpha\zeta)+\alpha\varepsilon' \\ &= d_{\zeta\eta}(\alpha)+\alpha\varepsilon' \end{aligned}$$

Prenons maintenant $t \in \mathcal{P}^1(F,E).I$, et on calcule

$$\begin{aligned} d_{\theta\eta}(\alpha+t) &= d_{\theta\eta}(\alpha)+d_{\theta\eta}(t) \\ &= d(\alpha)+\eta\alpha+\alpha\theta+d(t)+\eta t+t\theta \\ &= d(\alpha)+\eta\alpha+\alpha(\zeta+\varepsilon')+d(t)+\eta t+t(\zeta+\varepsilon') \\ &= d(\alpha)+\eta\alpha+\alpha\zeta+\alpha\varepsilon'+d(t)+\eta t+t\zeta+t\varepsilon' \\ &= (d(\alpha)+\eta\alpha+\alpha\zeta)+\alpha\varepsilon'+(d(t)+\eta t+t\zeta)+t\varepsilon' \\ &= d_{\zeta\eta}(\alpha)+d_{\zeta\eta}(t)+\alpha\varepsilon' \qquad (t\varepsilon'=0 mod(I)) \end{aligned}$$

Posons maintenant $\varepsilon' = -a\omega$ donc

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon' &= -\alpha a\omega \\ &= -(1 + d_{\eta\eta}(g))\omega \\ &= -\omega - d_{\eta\eta}(g)\omega \\ &= -\omega - d_{\zeta\eta}(g\omega) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} d_{\zeta\eta}(g\omega) &= d_{\eta\eta}(g)\omega + g d_{\zeta\eta}(\omega) \\ &= d_{\eta\eta}(g)\omega \qquad (car \quad d_{\zeta\eta}(\omega) = 0). \end{aligned}$$

Posons $t = g\omega$ et remplaçons ça dans la formule de $d_{\theta\eta}(\alpha + t)$, on obtient

$$\begin{aligned} d_{\theta\eta}(\alpha + t) &= d_{\zeta\eta}(\alpha) + d_{\zeta\eta}(g\omega) + \alpha\varepsilon' \\ &= d_{\zeta\eta}(\alpha) + d_{\zeta\eta}(g\omega) - \omega - d_{\zeta\eta}(g\omega) \\ &= d_{\zeta\eta}(\alpha) - \omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

car par hypothèse $d_{\zeta\eta}(\alpha) = \omega$.

Ces résultats montrent bien le théorème suivant :

**Théorème 5.4.1** *Il existe des relevements* $\zeta$ *pour* $\zeta_I$ *et* $\alpha$ *pour* $\alpha_I$ *tels que* $d(\zeta) + \zeta^2 = 0$ *et* $d_{\zeta\eta}(\alpha) = 0$.

**Corollaire 5.4.2** *Le morphisme* $V_E \to \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ *est formellement lisse.*

***Preuve :*** Voir Théorème 5.4.1.

**Proposition 5.4.3** *Soit* $X, Y$ *des schémas avec des morphismes*

$$f : X \to \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}, \qquad g : Y \to \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$$

*alors le produit fibré*

$$X \times_{\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}} Y$$

*est représenté par un* $n$*-champ d'Artin (ie : géométrique ) de type fini.*

***Preuve :*** On peut supposer que $X$ et $Y$ sont affines. Soient $B$ et $C$ deux algèbres. On pose $X = Spec(B)$ et $Y = Spec(C)$ les schémas affines associés, et on peut supposer que les morphismes $f$ et $g$ proviennent d'éléments de ${\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}}^{es}(B)$ et ${\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}}^{es}(C)$ qu'on notera $(F, \eta)$ et $(G, \rho)$.

Ce sont alors des éléments de Maurer-Cartan $\eta \in \mathcal{P}^1(F, F) \otimes_k B$ et $\rho \in \mathcal{P}^1(G, G) \otimes_k C$. Une flèche $Spec(R) \to X \times Y$ correspond à $B \otimes_k C \to R$, et on notera $\eta_R$ et $\rho_R$ les images de $\eta \otimes 1_C$ et $1_B \otimes \rho$ dans $\mathcal{P}^1(F,F) \otimes_k R$ et $\mathcal{P}^1(G,G) \otimes_k R$ respectivement. Ce sont des MC-éléments.

L'ensemble simplicial des relevements

$$\begin{array}{ccc} & & X \times_{\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}} Y \\ & \nearrow & \downarrow \\ Spec(R) & \to & X \times Y \end{array}$$

est équivalent à

$$\mathcal{M}^{(\infty,0)}(R)((F,\eta_R),(G,\rho_R))$$

qui est égale au sous-ensemble simplicial

$$\mathcal{M}^{(\infty,1)}(R)((F,\eta_R),(G,\rho_R))^{iso} \subset \mathcal{M}^{(\infty,1)}(R)((F,\eta_R),(G,\rho_R))$$

des morphismes inversibles.

D'autre part

$$\mathcal{M}^{(\infty,1)}(R)((F,\eta_R),(G,\rho_R)) = DP(\tau_{\leq 0}(\mathcal{P}(F,G) \otimes_k R, d_{\eta_R,\rho_R})).$$

Posons

$$L^{\cdot} := (P(F,G) \otimes_k B \otimes_k C, d_{\eta\otimes 1_C, 1_B \otimes \rho})$$

c'est un complexe parfait de $B \otimes_k C$-modules.

Le foncteur

$$R \mapsto DP(\tau_{\leq 0}(\mathcal{P}(F,G) \otimes_k R, d_{\eta_R,\rho_R})) = DP(\tau_{\leq 0}(L^{\cdot} \otimes_{B\otimes_k C} R))$$

définit un $n$-champs d'Artin $H(f,g)$ au dessus de $X \times Y$ d'après [SIMP1].

Le produit fibré $X \times_{\mathcal{M}} Y$ est le sous champs des morphismes inversibles $H(f,g)^{iso} \subset H(f,g)$. On pourra voir que c'est un sous-champs ouvert, ce qui montre que $X \times_{\mathcal{M}} Y$ est un $n$-champs d'Artin.

**Lemme 5.4.4** *Soit $k$ un corps algébriquement clôs, $M$ un $(n+1)$-champs sur un schémas affine $k-Alg-Com$ et si $V$ est un schéma de type fini sur $k$, et si on a un morphisme $\varphi : V \to M$. Si $\varphi$ est formellement lisse, et si l'application $V(k) \to \mathcal{P}^0(M(k))$ est surjective, et si en plus de ça $M$ satisfait les conditions de la proposition (5.4.3). Alors $M$ est un $(n+1)$-champs d'Artin de type fini.*

**Corollaire 5.4.5** *le $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est un $(n+1)-$champs d'Artin de type fini.*

On rappel ici que dans [TOVA], Toen et Vaquie ont déjà montré que le $n$-champ **Perf** possède une structure géométrique, mais ils n'ont pas fourni une carte naturelle.

Pridham montre qu'un $(n+1)$-champs d'Artin de type fini peut être représenté par un schéma simplicial ayant des bons propriétés [PRID]. Ceci nous a motivé à chercher à construire un tel schéma simplicial explicitement en partant des cartes $V_E$. On prouve les propriétés de [PRID] pour notre schéma simplicial dans le prochain chapitre.

# Chapitre 6

# La propriété de lissité de Grothendieck-Pridham

## 6.1 La condition de Grothendieck-Pridham

Sur le schéma simplicial $X.$, on considère
$Match_{\wedge_k^n}(X) = \{f_i \in X_{n-1}\,;$ pour $i \in \{0, ..., n\}, i \neq k$ tel que $\partial_j(f_i) = \partial_{i-1}(f_j)$ dans $X_{n-2}$ pour $0 \leq j < i \leq n$ et $i, j \neq k\}$.
Les $f_i$ jouent le rôle des $i^{\text{ème}}$ faces.

**Remarque 6.1.1** $Match_{\wedge_k^n}(X)$ est également un schéma, et on un morphisme de schémas $\mu : X_n \to Match_{\wedge_k^n}(X)$.

**Condition de $G.P_{n,k}$ :**

Le morphisme $\mu : X_n \to Match_{\wedge_k^n}(X)$ est lisse et surjectif.

Si les $X_n$ sont de type fini, alors $Match_{\wedge_k^n}(X)$ sont aussi de type fini. Dans ce cas il suffit de prouver que le morphisme $\mu$ est formellement lisse. Il suffit de prouver que pour tout idéal $I \subset B$ avec $I^2 = 0$ ($B$ peut être artinien si nécessaire ) : soit $\alpha \in Match_{\wedge_k^n}(X)$ et $\tilde{\alpha} \in X_n(B/I)$ tel que $\mu(\tilde{\alpha}) = \alpha/_{B/I}$, alors il existe un relèvement $\hat{\alpha} \in X_n(B)$ tel que $\hat{\alpha}/_{B/I} = \tilde{\alpha}$ et $\mu(\hat{\alpha}) = \alpha$.

## 6.2 Pour le nerf cohérent de $\mathcal{MC}$

Rappelons que nous considérons un foncteur $R$ qui satisfait $REPR$. La proposition 4.4.4 nous donne le schéma simplicial $X.$ où $X_n(B) \subset NC_n(R(B))$ est l'ensemble des éléments qui sont dans $NC_n^*(R(B'))$ aprés restriction sur un revêtement étale $Spec(B') \to Spec(B)$. On notera ce sous ensemble par $NC_n^{*,\sim}(R(B))$. Pour les preuves de lissités et surjectivités nous pouvons supposer avoir des éléments de $NC_n^*(R(B))$.

**Théorème 6.2.1** *Le schéma simplicial défini par* $X(B) := NC^{*,\sim}(R(B))$ *satisfait aux conditions de Grothendieck-Pridham* $G.P_{n,k}$ *pour tout* $n \geq 2$ *et tout* $0 \leq k \leq n$.

Si les complexes de morphismes de $\mathcal{P}$ sont à support en degrés $\geq -m$ alors $X.$ est un $(m+1)$-hypergroupoïde.

Le problème du sommet : on a déjà explicité le cas $X_1 \rightrightarrows X_0$ dans le précédent chapitre et on peut le représenter de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & Match_{\wedge_0^1}(X) = X_0 . \\
X_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & Match_{\wedge_1^1}(X) = X_0
\end{tikzcd}$$

Le résultat du chapitre d'avant prouve que pour $R(B) = MC(P \otimes_k B)$, $X = NC^* \circ R$ satisfait $GP_{1,0}$ et la preuve de $GP_{1,1}$ est similaire.

**Corollaire 6.2.2** *Soit* $\mathcal{P}$ *une dg-catégorie qui satisfait aux hypothèses de la section 5.2. On pose* $R(B) := MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$ *et* $X(B) := NC^{*,\sim}(R(B))$*. Alors* $X.$ *satisfait* $G.P_{n,k}$ *pour tout* $n \geq 1$ *et tout* $0 \leq k \leq n$ *, donc* $X.$ *est un schéma simplicial de Grothendieck-Pridham.*

**Corollaire 6.2.3** *[PRID] Dans ce cas* $R(B) = MC(P \otimes_k B)$*, le schéma simplicial* $X$ *correspond à un* $n$*-champs géométrique.*

**Remarque 6.2.4** le plus grand schéma simplicial $\overline{X}$ peut probablement être quasi-$G.P_{n,k}$. C'est-à-dire satisfait au $G.P_{n,k}$, $\forall 0 < k < n$ pour les faces intérieurs. C'est une condition $G.P$ sur les quasi-catégories.

La suite du papier est consacré à la démonstration du théorème 2.6. Soit $B$ une $k$-algèbre commutative. On appliquera la discussion du nerf cohérent pour $\mathcal{A} = R(B)$.

## 6.3 Les éléments de $Match_{\wedge_k^n}(X)$

Soit $\alpha \in Match_{\wedge_k^n}(X)$ , un tel élément est définit de la manière suivante :

1. Pour $n \geq 2$ : Pour toute suites $E_0, ..., E_n \in ob(R(B))$ et $i.$ avec $0 \leq i_0 < ... < i_l \leq n$, alors $\alpha(i_0, ..., i_l) \in R^{n-l}(B)(E_{i_l}, E_{i_0})$.
2. On considère cela pour tout les $i.$ sauf $(i_0, ..., i_l) = (0, ..., \hat{k}, ..., n)$ ou $(i_0, ..., i_l) = (0, ..., n)$.
3. On note que les $\alpha(i.)$ pour les suites dégénérées sont déterminés ($0$ ou $1_{E_i}$) par la condition **NC(i)** .

4. Ces données $\alpha$ doivent satisfaire à la condition **NC(ii)**.
5. Les $\alpha(i,j)$ doivent être inversibles à homotopie prés après passage à un revêtement étale $Spec(B') \to Spec(B)$. Cependant, pour prouver la propriété $G.P$, il suffit de passer à un revêtement étale de $Spec(B)$, on peut donc supposer que les $\alpha(i,j)$ sont inversibles à homotopie prés.

Un élément de $X_n(B)$ au dessus de $\alpha$ est la même chose que la donnée des $\alpha(0,...,\hat{k},...,n)$ et $\alpha(0,...,n)$ en plus, avec la condition **NC(ii)** encore.

Pour $n \geq 2$ la condition d'inversibilité de $\hat{\alpha}$ est automatique à partir de $\alpha$. Pour $n = 2$ : Si deux des $\alpha(0,1)$, $\alpha(1,2)$ et $\alpha(0,2)$ sont inversibles et $d(\alpha(1,2)) = \alpha(1,2)\alpha(0,1) - \alpha(0,2)$ , alors le troisième aussi est inversible. Donc on doit juste s'occuper de la condition $(ii)$.

On pose $E_0,...,E_n$ sur $B$ , on note par $i_\wedge$ les deux cas particuliers $(0,...,\hat{k},...,n)$ et $(0,...,n)$ , dans ce cas, on est donné $\tilde{\alpha}(i_0,...,i_l)$ sur $B/I$ , et on cherche $\hat{\alpha}(i) = \alpha(i)$ sauf pour les $i_\wedge$ et $\hat{\alpha}(i) = \tilde{\alpha}(i)$ dans $B/I$. Pour les $i_\wedge$, on a trois cas :

Cas 1 : Si $0 < k < n$ dans ce cas on a pas besoin d'utiliser l'inversibilité.

Cas 2 : $k = n$ similaire au cas où $k = 0$ qu'on va détailler après.

Cas 3 : $k = 0$ dans ce cas on est donné tout sauf $(1,...,n)$ et $(0,1,...,n)$.

## 6.4 Preuve pour $k = 0$

On commence maintenant la preuve du théorème (6.2.1) dans le cas où $n \geq 2$ et $k = 0$. Le système à résoudre est

$$\begin{cases} d(\hat{\alpha}(1,...,n)) = & \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(1,...,j) \circ \hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n) \\ d(\hat{\alpha}(0,...,n)) = & \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(0,...,j) \circ \hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n). \end{cases}$$

**Notation**

Fixons un $n$, on écrit notre système

$$\begin{cases} d(\hat{\alpha}(1,...,n)) = & \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(1,...,j) \circ \hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n) \\ = & U \\ d(\hat{\alpha}(0,...,n)) = & \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(0,...,j) \circ \hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n) \\ = & \alpha(0,1)\hat{\alpha}(1,...,n) + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(0,...,j) \circ \hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n) \\ = & \alpha\hat{\alpha}_1 + V \end{cases}$$

où $U$ et $V$ contiennent les termes qui sont déjà connus.

On note par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha & = & \alpha(0,1)\in R(B)^0(E_1,E_0)\\ \alpha a & = & 1+d(h)\\ a\alpha & = & 1+d(g)\\ d(a) & = & 0 \quad \text{et} \quad a\in R(B)^0(E_0,E_1)\\ d(\alpha) & = & 0\\ \hat{\alpha}_0 & = & \hat{\alpha}(0,1,...,n)\in R(B)^{1-n}(E_n,E_0)\\ \hat{\alpha}_1 & = & \hat{\alpha}(1,...,n)\in R(B)^{2-n}(E_n,E_1)\end{array}\right.$$

ce qui donne un nouveau système

$$\left\{\begin{array}{lcl} d(\hat{\alpha}_1) & = & U\\ d(\hat{\alpha}_0) & = & \alpha\hat{\alpha}_1+V\end{array}\right.$$

**Lemme 6.4.1** *On a*

1. $d(U)=0$.
2. $d(V)=-\alpha U$ *ce qui implique que pour toute solution* $\hat{\alpha}_1$ *on a* $d(\alpha\hat{\alpha}_1)+d(V)=0$.

**Preuve**

1. On a
$$U=\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(1,...,j)\circ\hat{\alpha}(j,...,n)+\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n)$$
donc
$$\begin{array}{rcl} d(U) & = & d(\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(1,...,j)\circ\hat{\alpha}(j,...,n)+\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n))\\ & = & \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}d\big(\hat{\alpha}(1,...,j)\circ\hat{\alpha}(j,...,n)\big)+\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}d\big(\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n)\big)\\ & = & \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}A_j+\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}B_j\end{array}$$
avec $A_j=d\big(\hat{\alpha}(1,...,j)\circ\hat{\alpha}(j,...,n)\big)$ et $B_j=d\big(\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n)\big)$.

$$\begin{aligned}
A_j &= d\big(\hat\alpha(1,...,j)\circ\hat\alpha(j,...,n)\big)\\
&= d\big(\hat\alpha(1,...,j)\big)\hat\alpha(j,...,n)+(-1)^j\hat\alpha(1,...,j)d\big(\hat\alpha(j,...,n)\big)\\
&= \big(\sum_{k=2}^{j-1}(-1)^{k-1}\hat\alpha(1,...,k)\hat\alpha(k,...,j)+\sum_{k=2}^{j-1}(-1)^k\hat\alpha(1,...,\hat k,...,j)\big)\hat\alpha(j,...,n)\\
&\quad +(-1)^j\hat\alpha(1,...,j)\big(\sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^{k-1}\hat\alpha(j,...,k)\hat\alpha(k,...,n)+\sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^k\hat\alpha(j,...,\hat k,...,n)\big)\\
&= \sum_{k=2}^{j-1}(-1)^{k-1}\hat\alpha(1,...,k)\hat\alpha(k,...,j)\hat\alpha(j,...,n)+\sum_{k=2}^{j-1}(-1)^k\hat\alpha(1,...,\hat k,...,j)\hat\alpha(j,...,n)\\
&\quad +\sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^{k+j-1}\hat\alpha(1,...,j)\hat\alpha(j,...,k)\hat\alpha(k,...,n)+\sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^{k+j}\hat\alpha(1,...,j)\hat\alpha(j,...,\hat k,...,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_j &= d\big(\hat\alpha(1,...,\hat j,...,n)\big)\\
&= \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k-1}\hat\alpha(1,...,[\hat j],...,k)\hat\alpha(k,...,[\hat j],...,n)+\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{\tau_{kj}}\hat\alpha(1,...,\hat k\leftrightarrow\hat j,...,n)
\end{aligned}$$

avec $\tau_{kj}=k$ si $k>j$ et $\tau_{kj}=k-1$ si $k<j$ et tels que la notation : $[\hat j]$ pour dire que le $j^{\text{ème}}$ terme est enlevé soit du coté gauche soit du coté droit mais pas des deux cotés au même temps, et la notation $\hat k\leftrightarrow\hat j$ pour dire que le $j^{\text{ème}}$ et le $k^{\text{ème}}$ sont enlevé quelques soit leurs ordres.

Ici on remarque que le $2^{\text{ème}}$ et le $4^{\text{ème}}$ terme de $A_j$ sont les mêmes avec signes opposés donc leurs sommes est nul. Aussi la somme des $1^{\text{er}}$ et $3^{\text{ème}}$ suivant les deux indices $k$ et $j$ donne exactement l'opposé du premier terme de $B_j$. Le $2^{\text{ème}}$ terme de $B_j$ s'auto-annule car on trouve le même terme deux fois avec signes opposés suivant l'emplacement des indices $k$ et $j$, et donc $\sum_j(A_j+B_j)=0$ , ce qui montre bien que $d(U)=0$.

2. Pour montrer que $d(\alpha\hat\alpha_1)+d(V)=0$ on supposera que $d(\hat\alpha_1)=U$ connue.

   On a

$$\begin{aligned}
d(\alpha\hat{\alpha}_1) + d(V) &= \alpha d(\hat{\alpha}_1) + d(V) \\
&= \alpha U + d(V) \\
&= \alpha\Big(\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(1,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n)\Big) \\
&\quad + d\Big(\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n)\Big) \\
&= \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}\alpha\hat{\alpha}(1,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\alpha\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}d\big(\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n)\big) + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}d\big(\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n)\big) \\
&= T_1 + T_2 + T_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j-1}\alpha\hat{\alpha}(1,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n) + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}\alpha\hat{\alpha}(1,...,\hat{j},...,n) \\
T_2 &= \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{j}d\big(\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n)\big) \\
T_3 &= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}d\big(\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n)\big)
\end{aligned}$$

On garde $T_1$ comme il est, et on calcule $T_2$ et $T_3$.

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j d\big(\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n)\big)\\
&= \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j \big(d(\hat{\alpha}(0,...,j))\hat{\alpha}(j,...,n) + (-1)^{j+1}\hat{\alpha}(0,...,j)d(\hat{\alpha}(j,...,n))\big)\\
&= \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j \Big(\big(\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^k\hat{\alpha}(0,...,k)\hat{\alpha}(k,...,j) + \sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{k},...,j)\big)\hat{\alpha}(j,...,n)\\
&\quad +(-1)^{j+1}\hat{\alpha}(0,...,j)\big(\sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^{k-1}\hat{\alpha}(j,...,k)\hat{\alpha}(k,...,n) + \sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^k\hat{\alpha}(j,...,\hat{k},...,n)\big)\Big)\\
&= \sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j+k}\hat{\alpha}(0,...,k)\hat{\alpha}(k,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n)\\
&\quad +\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j+k-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{k},...,j)\hat{\alpha}(j,...,n)\\
&\quad +\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j+k}\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,k)\hat{\alpha}(k,...,n)\\
&\quad +\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j+k+1}\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,\hat{k},...,n)
\end{aligned}$$

Et si on garde les mêmes notations que pour $B_j$, on remarque qu'il s'agit de la même formule sauf pour le premier indice qui part de 0 au lieu de 1 comme suivant :

$$\begin{aligned}
T_3 &= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1} d\big(\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n)\big)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\big(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\hat{\alpha}(0,...,[\hat{j}],...,k)\hat{\alpha}(k,...,[\hat{j}],...,n)\\
&\quad +\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{kj}}\hat{\alpha}(0,...,\hat{k}\leftrightarrow\hat{j},...,n)\big)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+j-1}\hat{\alpha}(0,...,[\hat{j}],...,k)\hat{\alpha}(k,...,[\hat{j}],...,n)\\
&\quad +\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{\tau_{kj}+j-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{k}\leftrightarrow\hat{j},...,n)
\end{aligned}$$

On remarque ici que les termes de $T_1$ ajouter au 1er et au 3ème termes de $T_2$ ensembles forment l'opposé du 1er terme de $T_3$, donc ils s'annulent. Aussi le 2ème et le 4ème terme de $T_2$ sont les mêmes avec signes opposés donc ils s'annulent. Il reste le 2ème de $T_3$ qui s'auto-annule puisque suivant l'emplacement des indices $k$ et $j$ on trouve à chaque fois le même terme deux fois mais avec deux signes différents. Conclusion $T_1 + T_2 + T_3 = 0$, ce qui montre notre lemme. ▲

Maintenant on va résoudre le système

$$\begin{cases} d(\hat{\alpha}_1) &= U \\ d(\hat{\alpha}_0) &= \alpha\hat{\alpha}_1 + V \end{cases} \tag{6.1}$$

Noter que $U$ est de degré $3-n$ et $V$ est de degré $2-n$. Dans la 2ème équation du système (6.1) et en multipliant par $a$ à droite, on trouve

$$\begin{aligned} ad(\hat{\alpha}_0) &= a\alpha\hat{\alpha}_1 + aV \\ &= (1 + d(g))\hat{\alpha}_1 + aV \\ &= \hat{\alpha}_1 + d(g)\hat{\alpha}_1 + aV \\ &= \hat{\alpha}_1 + d(g\hat{\alpha}_1) + gd(\hat{\alpha}_1) + aV \end{aligned}$$

car $\hat{\alpha}_1$ est de degré $2-n \equiv n(mod 2)$,

$$d(g\hat{\alpha}_1) = d(g)\hat{\alpha}_1 - gd(\hat{\alpha}_1) \quad \Rightarrow \quad d(g)\hat{\alpha}_1 = d(g\hat{\alpha}_1) + gd(\hat{\alpha}_1)$$

donc, en supposant la première équation du système (6.1) , on aurait

$$ad(\hat{\alpha}_0) = \hat{\alpha}_1 + d(g\hat{\alpha}_1) + gU + aV$$

Par intuition , on remarque que $\hat{\alpha}_1 = -gU - aV$ est une solution. En effet ;

$$\begin{aligned} d(\hat{\alpha}_1) &= d(-gU - aV) \\ &= -d(g)U + ad(V) \\ &= -(a\alpha - 1)U + a\alpha U \\ &= U. \end{aligned}$$

On remplace cette solution de la 2ème équation du système (6.1), on obtient

$$\begin{aligned} d(\hat{\alpha}_0) &= \alpha\hat{\alpha}_1 + V \\ &= \alpha(-gU - aV) + V \\ &= -\alpha gU - \alpha aV + V \\ &= -\alpha gU - (\alpha a - 1)V \\ &= -\alpha gU - d(h)V. \end{aligned}$$

Or
$$d(hV) = d(h)V - hd(V) \quad \Rightarrow \quad d(h)V = d(hV) + hd(V)$$
et

$$\begin{aligned} d(\alpha g\hat{\alpha}_1) &= d(\alpha g)\hat{\alpha}_1 - \alpha g d(\hat{\alpha}_1) \\ &= (d(\alpha)g + \alpha d(g))\hat{\alpha}_1 - \alpha g d(\hat{\alpha}_1) \\ &= \alpha d(g)\hat{\alpha}_1 - \alpha g d(\hat{\alpha}_1) \\ \Rightarrow \quad & \alpha g d(\hat{\alpha}_1) = \alpha d(g)\hat{\alpha}_1 - d(\alpha g\hat{\alpha}_1). \end{aligned}$$

Car $d(\alpha) = 0$. Donc notre deuxième équation devient

$$\begin{aligned} d(\hat{\alpha}_0) &= -d(h)V - \alpha g U \\ &= -d(hV) - hd(V) + d(\alpha g\hat{\alpha}_1) - \alpha d(g)\hat{\alpha}_1 \\ &= d(\alpha g\hat{\alpha}_1 - hV) - (\alpha d(g)\hat{\alpha}_1 + hd(V)) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \alpha d(g)\hat{\alpha}_1 + hd(V) &= \alpha(a\alpha - 1)\hat{\alpha}_1 - h\alpha U \\ &= \alpha a\alpha\hat{\alpha}_1 - \alpha\hat{\alpha}_1 - h\alpha U \\ &= (d(h) + 1)\alpha\hat{\alpha}_1 - \alpha\hat{\alpha}_1 - h\alpha U \\ &= d(h)\alpha\hat{\alpha}_1 + \alpha\hat{\alpha}_1 - \alpha\hat{\alpha}_1 - h\alpha d(\hat{\alpha}_1) \\ &= d(h)\alpha\hat{\alpha}_1 - h\alpha d(\hat{\alpha}_1) \\ &= d(h\alpha)\hat{\alpha}_1 - h\alpha d(\hat{\alpha}_1) \\ &= d(h\alpha\hat{\alpha}_1) \end{aligned}$$

car $d(h\alpha) = d(h)\alpha$ et $d(\hat{\alpha}_1) = U$.

Finalement on obtient l'équation

$$d(\hat{\alpha}_0) = d(\alpha g\hat{\alpha}_1 - hV - h\alpha\hat{\alpha}_1)$$

La solution de cette équation est

$$\hat{\alpha}_0 = \alpha g\hat{\alpha}_1 - hV - h\alpha\hat{\alpha}_1.$$

Donc le système admet

$$(\hat{\alpha}_1 = -(gU + aV), \quad \hat{\alpha}_0 = (\alpha g - h\alpha)\hat{\alpha}_1 - hV)$$

comme solution.

Nous avons donc résolu le système d'équations (6.1), ce qui montre la surjectivité du morphisme de Pridham pour $n \geq 2$ et $k = 0$. On fait maintenant la preuve de la lissité formelle, en suivant les mêmes lignes.

On note par $[\tilde{\alpha}_0]$ et $[\tilde{\alpha}_1]$ les solutions dans $NC(R(B/I))$. Notre objectif est de trouver une solution $\hat{\alpha}$ sur $B$ qui étend $\alpha$ et $[\tilde{\alpha}]$.

On prend sur $B$ deux solutions quelconques $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ tels que $\tilde{\alpha}_0 = [\tilde{\alpha}_0]$ modulo $I$ et $\tilde{\alpha}_1 = [\tilde{\alpha}_1]$ modulo $I$, et on définit $\varphi$ et $\psi$ de $I.R^!(B)$ comme les termes d'erreurs des équations du système :

$$\left\{\begin{array}{lll} d(\tilde{\alpha}_1) & = & U+\varphi \\ d(\tilde{\alpha}_0) & = & \alpha\tilde{\alpha}_1 + V + \psi \end{array}\right. \tag{6.2}$$

$$\begin{array}{ll} d(\tilde{\alpha}_1) = U+\varphi & \Rightarrow \ \varphi = d(\tilde{\alpha}_1) - U \\ d(\tilde{\alpha}_0) = \alpha\tilde{\alpha}_1 + V + \psi & \Rightarrow \ \psi = d(\tilde{\alpha}_0) - \alpha\tilde{\alpha}_1 - V \end{array}$$

On applique la différentielle $d$ sur $\varphi$ et $\psi$, on trouve :

$$\begin{array}{lll} d(\varphi) & = & d^2(\tilde{\alpha}_1) - d(U) \\ & = & 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lll} d(\psi) & = & d^2(\tilde{\alpha}_0) - d(\alpha\tilde{\alpha}_1) - d(V) \\ & = & -\alpha d(\tilde{\alpha}_1) - d(V) \\ & = & \alpha(-U + -\varphi) - d(V) \\ & = & -\alpha U - \alpha\varphi + \alpha U \qquad \text{car } d(V) = -\alpha U \\ & = & -\alpha\varphi. \end{array}$$

On note qu'il s'agit des mêmes formules que dans le lemme (6.4.1). On pose maintenant les deux solutions $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_1$ avec les deux perturbations $\varepsilon_0$ et $\varepsilon_1$ tels que

$$\hat{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_0 - \varepsilon_0 \qquad \text{et} \qquad \hat{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1 - \varepsilon_1$$

On applique la différentielle $d$ sur les deux termes pour calculer $d(\varepsilon_0)$ et $d(\varepsilon_1)$ on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lll} d(\hat{\alpha}_0) & = & d(\tilde{\alpha}_0) - d(\varepsilon_0) \\ d(\hat{\alpha}_1) & = & d(\tilde{\alpha}_1) - d(\varepsilon_1) \end{array}\right. \tag{6.3}$$

En remplaçant le système (6.3) dans le système (6.1), le système que nous cherchons à résoudre devient

$$\left\{\begin{array}{lll} d(\tilde{\alpha}_1) - d(\varepsilon_1) & = & U \\ d(\tilde{\alpha}_0) - d(\varepsilon_0) & = & \alpha(\tilde{\alpha}_1 - \varepsilon_1) + V \end{array}\right. \tag{6.4}$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lll} d(\varepsilon_1) & = & d(\tilde{\alpha}_1) - U \\ d(\varepsilon_0) & = & d(\tilde{\alpha}_0) - \alpha\tilde{\alpha}_1 - V + \alpha\varepsilon_1 \end{array}\right. \tag{6.5}$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d(\varepsilon_1) & = & \varphi \\ d(\varepsilon_0) & = & \alpha\varepsilon_1 + \psi. \end{array} \right. \tag{6.6}$$

Ce système admet des solutions similaires que celui d'avant. En effet, si en prend la solution

$$(\varepsilon_1 = -g\varphi - a\psi, \quad \varepsilon_0 = (\alpha g - h\alpha)\varepsilon_1 - h\psi).$$

En effet :

$$\begin{array}{rcl} d(\varepsilon_1) & = & -d(g\varphi) - d(a\psi) \\ & = & -d(g)\varphi + ad(\psi) \\ & = & -d(g)\varphi + a\alpha\varphi \\ & = & -d(g)\varphi + (1 + d(g))\varphi \\ & = & \varphi. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} d(\varepsilon_0) & = & d(\alpha g\varepsilon_1) - d(h\alpha\varepsilon_1) - d(h\psi) \\ & = & d(\alpha g)\varepsilon_1 - \alpha g d(\varepsilon_1) - d(h\alpha)\varepsilon_1 + h\alpha d(\varepsilon_1) - d(h)\psi + hd(\psi) \\ & = & \alpha d(g)\varepsilon_1 - \alpha g\varphi - d(h)\alpha\varepsilon_1 + h\alpha\varphi - d(h)\psi - h\alpha\varphi \\ & = & \alpha(a\alpha - 1)\varepsilon_1 - \alpha g\varphi - (\alpha a - 1)\alpha\varepsilon_1 - (\alpha a - 1)\psi \\ & = & \alpha a\alpha\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_1 - \alpha g\phi - \alpha a\alpha\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_1 - \alpha a\psi + \psi \\ & = & -\alpha(g\varphi + a\psi) + \psi \\ & = & \alpha\varepsilon_1 + \psi. \end{array}$$

On a terminé la preuve que le schéma simplicial $X$ satisfait les conditions $G.P_{n,0}$ pour $n \geq 2$. La preuve que le schéma simplicial $X$ satisfait les conditions $G.P_{n,n}$ se fait d'une manière similaire.

## 6.5 Preuve pour $0 < k < n$

Maintenant on va traiter $G.P_{n,k}$ pour $0 < k < n$, sans utilisation de l'inverse .

**Théorème 6.5.1** *Les deux schémas simpliciaux $X$ et $\overline{X}$ satisfont tous les deux aux conditions $G.P_{n,k}$ pour $0 < k < n$.*

De la même manière, on notera par $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}(0, 1, ..., n)$ et $\hat{\alpha}_a = \hat{\alpha}(0, 1, ..., \hat{a}, ..., n)$ tel que $\hat{a}$ signifie que le $a^{\text{ème}}$ élément est enlevé.

On va résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} d(\hat{\alpha}_a) & = & \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{[j]}\hat{\alpha}(0,...,[\hat{a}],...,j)\hat{\alpha}(j,...,[\hat{a}],...,n) \\ & & +\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{[j]}\hat{\alpha}(0,...,\hat{a}\leftrightarrow\hat{j},...,n) \\ & = & U \\ d(\hat{\alpha}_0) & = & \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n) \\ & & +\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n) \\ & = & (-1)^{\tau_a}\hat{\alpha}_a+\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{[j]}\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n) \\ & & +\sum_{j=1,j\neq a}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n)\Big) \\ & = & (-1)^{\tau_a}\hat{\alpha}_a+V \end{array}\right. \tag{6.7}$$

où $\tau_a$ est le degré de l'élément $a$ qui vaut dans notre cas $a+1$, la notation $[j]$ signifie que $[j]=j$ si $j<a$ et $[j]=j-1$ si $j>a$ et $[\hat{a}]$ signifie que $a$ est enlever d'un coté ou l'autre.

Avec ces notations, on voit que

$$\begin{array}{lcl} U & = & \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{[j]}\hat{\alpha}(0,...,[\hat{a}],...,j)\hat{\alpha}(j,...,[\hat{a}],...,n) \\ & & +\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{[j]}\hat{\alpha}(0,...,\hat{a}\leftrightarrow\hat{j},...,n) \\ V & = & \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{[j]}\hat{\alpha}(0,...,j)\hat{\alpha}(j,...,n) \\ & & +\sum_{j=1,j\neq a}^{n-1}(-1)^{j}\hat{\alpha}(0,...,\hat{j},...,n). \end{array}$$

Avant de résoudre le système (6.7), on va d'abord démontrer le lemme suivant

**Lemme 6.5.2** *la différentielle $d$ vérifie :*

1. $d(U)=0$.
2. $d((-1)^{\tau_a}\hat{\alpha}_a+V)=0$, *cela signifie que* $(-1)^{\tau_a}U+d(V)=0$.

**Preuve :**

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme (6.4.1)▲

On va résoudre maintenant le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} d(\hat{\alpha}_a) & = & U \\ d(\hat{\alpha}_0) & = & (-1)^{\tau_a}\hat{\alpha}_a+V \end{array}\right. \tag{6.8}$$

ce système admet comme solutions évidentes $\hat{\alpha}_a=-(-1)^{\tau_a}V$ et $\hat{\alpha}_0=0$. ▲

**Remarque 6.5.3** *Pour tout Foncteur $R$ satisfait (REPR), nous avons que le schéma simplicial $X$ satisfait au $G.P_{n,k}$, $\forall n \geq 2$ et $\forall 0 < k < n$.*

Maintenant si on note par $[\tilde{\alpha}_0]$ et $[\tilde{\alpha}_a]$ les solutions modulo $I$ du système (6.8), on cherche des solutions $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_a$ sur $B$ qui étendent $[\tilde{\alpha}_0]$ et $[\tilde{\alpha}_a]$.

Soient $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_a$ deux solutions quelconques sur $B$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} [\tilde{\alpha}_0] & = & \tilde{\alpha}_0 \text{ modulo } I \\ [\tilde{\alpha}_a] & = & \tilde{\alpha}_a \text{ modulo } I \end{array}\right.$$

On garde les mêmes notations que dans le cas (3), soient $\varphi$ et $\psi$ les termes d'érreurs des équations du système

$$\left\{\begin{array}{l} d(\tilde{\alpha}_a) = U + \varphi \\ d(\tilde{\alpha}_0) = (-1)^a\tilde{\alpha}_a + V + \psi \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi = d(\tilde{\alpha}_a) - U \\ \psi = d(\tilde{\alpha}_0) - (-1)^a\tilde{\alpha}_a - V \end{array}\right. \tag{6.9}$$

On applique la différentielle $d$ sur $\varphi$ et $\psi$, on trouve

$$\begin{array}{rcl} d(\varphi) & = & d^2(\tilde{\alpha}_a) - d(U) = 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} d(\psi) & = & d^2(\tilde{\alpha}_0) - (-1)^a d(\tilde{\alpha}_a) - d(V) \\ & = & -(-1)^{\tau_a} d(\tilde{\alpha}_a) - d(V) \\ & = & -(-1)^{\tau_a}(U + \varphi) - d(V) \\ & = & -(-1)^{\tau_a}\varphi \end{array}$$

On pose maintenant les deux solutions $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_a$ avec les deux perturbations $\varepsilon_0$ et $d(\varepsilon_a)$ tels que

$$\hat{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_0 - \varepsilon_0 \qquad \text{et} \qquad \hat{\alpha}_a = \tilde{\alpha}_a - \varepsilon_a$$

On applique la différentielle $d$ sur les deux termes pour calculer $d(\varepsilon_0)$ et $\varepsilon_a$ on trouve :

$$\begin{array}{rcl} d(\varepsilon_0) & = & d(\tilde{\alpha}_0) - d(\hat{\alpha}_0) \\ & = & (-1)^a\tilde{\alpha}_a + V + \psi - (-1)^a\hat{\alpha}_a - V \\ & = & \psi + (-1)^{\tau_a}\varepsilon_a \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} d(\varepsilon_a) & = & d(\tilde{\alpha}_a) - d(\hat{\alpha}_a) \\ & = & U + \varphi - U \\ & = & \varphi. \end{array}$$

On obtient ainsi un système

$$\begin{cases} d(\varepsilon_0) & = & \psi + (-1)^{\tau_a} \varepsilon_a \\ d(\varepsilon_a) & = & \varphi. \end{cases}$$

qui admet une solution similaire à celle du système (6.8), donc on peut prendre $\varepsilon_a = -(-1)^{\tau_a}\psi$ et $\varepsilon_0 = 0$. Nous avons donc résolu le système d'équations (6.8), ce qui montre la lissité formelle du morphisme de Pridham $\bullet$

# Chapitre 7

# Compléments

## 7.1 Faisceaux des groupes d'homotopies

Si $X.$ est un schéma de Grothendieck-Pridham, alors l'application

$$B \mapsto X.(B)$$

est un préfaiscau simplicial sur $Aff_k$ qui satisfait à la condition de Kan localement. C'est-à-dire que pour un élément $z \in Match_{\wedge_n^k}(X(B))$ il existe un revêtement étale

$$Spec(B') \to Spec(B)$$

et un élément $x \in X_n(B')$ un relèvement de $z$. On peut définir les faisceaux de groupes d'homotopies par la même procedure que pour les ensembles simpliciaux de Kan.

Fixons un schéma de base $Spec(A)$ et un point de base $x \in X_0(A)$, soit $\Phi_n(X,x)$ le préfaisceau qui à tout algèbre $B$ associé l'ensemble d'éléments $\phi \in X_n(B)$ tel que

$$\partial_i(\phi) = s^{n-1}(x|_B) \in X_{n-1}(B).$$

On définit une relation sur $\Phi_n(X,x)(B)$ par $\phi \sim_0 \phi'$ s'il existe $\psi \in X_{n+1}(B)$ tel que $\partial_0(\psi) = \phi$, $\partial_1(\psi) = \phi'$ et $\partial_i(\psi) = s^n(x|_B)$ pour tout $i \geq 2$.

Soit $\sim$ la relation déquivalence engendrée par $\sim_0$. Soit

$$\pi_n^{pre}(X,x)(B) = \Phi_n(X,x)(B)/\sim$$

Soit $\pi_n(X,x)$ le faisceau associé sur le site $Aff_A$ pour la topologie étale.

Pour $n \geq 2$, $\pi_n(X,x)$ admet une unique structure de faisceau de groupes abéliens telle que si $\zeta \in X_{n+1}(B)$ avec $\partial_i(\zeta) = \phi_i \in \Phi_n(X,x)(B)$ on a

$$\sum(-1)^i[\phi_i] = 0 \quad \text{dans} \quad \pi_n(X,x)(B).$$

Pour $n = 1$, $\pi_1(X,x)$ admet une unique structure de faisceau de groupes telle que si $\zeta \in X_2(B)$ avec $\partial_i(\zeta) = \phi_i \in \Phi_1(X,x)(B)$ on a

$$[\phi_0][\phi_2] = [\phi_1] \quad \text{dans} \quad \pi_1(X,x)(B).$$

## Calcul des groupes d'homotopies

Pour le schéma de Grothedieck-Pridham $X$. qu'on a construit, nous pouvons entreprendre de calculer les faisceaux des groupes d'homotopies en termes des complexes. On a le foncteur $R(B) = \mathcal{MC}(\mathcal{P} \otimes B)$ et $X_n(B) = NC^{*,\sim}(R(B))$. Soit $x \in X_0(B) = ob(R(B))$. Remarquons que le point dégénéré $s^n(x) \in X_n(B)$ est l'élément $(x, \cdots, x, \sigma)$ du nerf cohérent $NC_n(R(B))$ définit par les conditions $X_i = x$, $\sigma(i,j) = 1_x$ et $\sigma(i_0, \cdots, i_k) = 0$ pour $k \geq 2$.

On peut donc écrire les éléments de $\Phi_n(X,x)(B)$ pour $n \geq 1$. Un tel élément s'écrit $(x, \cdots, x, \alpha)$ où $\alpha(i_0, \cdots, i_k) = \sigma(i_0, \cdots, i_k)$ pour tout $k < n$. Le seul nouvel élément est $\phi := \alpha(0, \cdots, n) \in R(B)^{1-n}(x,x)$ qui doit satisfaire l'équation **NC(ii)** :

$$d(\phi) = d(\alpha(0, \cdots, n)) = 0.$$

Dans la suite on notera par $\phi$ aussi l'élément $(x, \cdots, x, \alpha)$ de $\Phi_n(X,x)(B) \subset X_n(B)$.

Supposons que $n \geq 2$ et que nous avons une suite $\phi_0, \cdots, \phi_{n+1}$ de tels éléments. Un élément $\psi$ de $X_{n+1}(B)$ tel que $\partial_i(\psi) = \phi_i$ s'écrit $(x, \cdots, x, \beta)$ où $\beta(i_0, \cdots, i_k) = \sigma(i_0, \cdots, i_k)$ pour $k < n$,

$$\beta(0, \cdots, \hat{i}, \cdots, n+1) = \phi_i,$$

et il y a un nouvel élément qu'on notera par $\psi^{n+1} = \beta(0, \cdots, n+1) \in R(B)^{-n}(x,x)$ qui doit satisfaire l'équation

$$\begin{aligned} d(\psi^{n+1}) &= d(\beta(0, \cdots, n+1)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \beta(0, \cdots, \hat{j}, \cdots, n+1) \\ &\quad + (-1)^n \beta(0, \cdots, n) \sigma(n, n+1) \\ &\quad - \sigma(0,1) \beta(1, \cdots, n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \phi_j + (-1)^n \phi_{n+1} 1_x - 1_x \phi_0 \\ &= -\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \phi_j. \end{aligned}$$

On explicite la relation $\sim_0$ . On a $\phi \sim_0 \phi'$ s'il existe un élément $\psi$ pour la suite $(\phi, \phi', 0, 0, 0, \cdots, 0)$. C'est-à-dire s'il existe $\psi^{n+1} \in R(B)^{-n}(x,x)$ avec

$$d(\psi^{n+1}) = \phi' - \phi.$$

C'est une relation d'équivalence déjà, donc $\sim = \sim_0$ et

$$\pi_n^{pre}(X,x)(B) = \Phi_n(X,x)(B)/\sim = H^{1-n}(R(B)(X,x)).$$

Donc le faisceau $\pi_n(X,x)$ sur le site $Aff_B$ est le faisceau de cohomologie associé au préfaisceau $B' \mapsto H^{1-n}(R(B'))$.

Pour $n = 1$, supposons que nous avons une suite $\phi_0, \phi_1, \phi_2$ . Un élément $\psi$ de $X_2(B)$ tel que $\partial_i(\psi) = \phi_i$ s'écrit $(x, x, x, \beta)$ où

$$\beta(0,1) = \phi_2, \quad \beta(0,2) = \phi_1, \quad \beta(1,2) = \phi_0,$$

avec un nouvel élément $\psi^2 = \beta(0,1,2) \in R(B)^{-1}(x,x)$ qui doit satisfaire l'équation

$$\begin{aligned} d(\psi^2) &= d(\beta(0,1,2)) \\ &= \beta(0,2) - \beta(1,2)\beta(0,1) \\ &= \phi_1 - \phi_0\phi_2. \end{aligned}$$

En particulier $\phi \sim \phi'$ si et seulement s'il existe $\psi$ pour la suite $(\phi, \phi', 1_x)$. C'est-à-dire $\phi' - \phi = d(\psi^2)$. Noter que pour être dans $X_1(B)$, il faut que $\phi$ soit localement inversible.

L'espace $H^0(R(B)(x,x))$ est une algèbre et le $\pi_1(X,x)(B)$ est le groupe multiplicatif de ses éléments inversibles.

## 7.2 Exemple :

Dans cet exemple, on va utiliser les mêmes arguments que dans [BENZ08], pour cela on donne une bref rappel de l'$\infty$-champs $Perf$ :

Un complexe strictement parfait est un complexe strictement borné de fibrés vectoriels algébriques. On peut dire qu'un complexe est parfait s'il est localement quasi-isomorphe à un complexe strictement parfait.

Le champs $Perf$ des complexes parfait est un foncteur

$$\begin{aligned} Aff_k^o &\to Ens^{\Delta^o} \\ X &\mapsto \mathcal{N}erf(CpxPerf_{qiso}(X)) \end{aligned}$$

où $Aff_k^o$ est la catégories des schémas affines et $CpxPerf_{qiso}$ est la catégorie dont les objets sont des complexe parfait et les flèches sont les quasi-isomorphismes entre ces complexes.

On choisit un nombre fini des complexes d'espaces vectoriels de dimensions finies avec $d = 0$, on les notes par $E^{\cdot} := (E^{\cdot}, 0)$. Soit $\mathcal{P}^{\cdot}$ la dg-catégorie formée par ces objets, avec

$$\mathcal{P}^{\cdot}(E^{\cdot}, F^{\cdot}) := (E^{\cdot})^* \otimes F^{\cdot}, \quad d = 0.$$

Un élément de Maurer-Cartan $\eta$ dans $\mathcal{P}^1(E^{\cdot}, E^{\cdot})$ est un différentiel

$$\eta = \{\eta^i\}, \quad \eta^i : E^i \to E^{i+1} \quad \text{et} \quad \eta^{i+1}\eta^i = 0.$$

qui permet d'obtenir un nouveau complexe

$$\cdots \xrightarrow{\eta^{i-1}} E^i \xrightarrow{\eta^i} E^{i+1} \xrightarrow{\eta^{i+1}} \cdots$$

Le schéma $V_{E^\cdot}$ est la variété des complexes de Buchsbaum-Eisenbud, voir [BUCH1], [BUCH2], [BRUN], [HUNE], [KEMP], [MASS], [TRIV] et [YOSH]. Le champs $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est le sous-$(n+1)$-champs ouvert de $Perf$ couvert par les cartes $V_{E^\cdot}$ et les morphismes

$$V_{E^\cdot} \to \mathcal{MC}_{\mathcal{P}} \subseteq Perf.$$

sont ceux mentionnés dans [BENZ08].
L'application du corollaire 5.4.5 dans le cas de cet exemple, nous donne une nouvelle démonstration du théorème de Toen-Vaquie dans [TOVA] que le champs $Perf$ est recouvert de $n$-champs d'Artin.

Soit $A$ un $k$-algèbre artinien de type fini. On pourra traiter $Perf(A)$.

On note par $s. = (\cdots, s_i, \cdots)$ avec $s_i \geq 0, \forall i$ et $\sum_i s_i$ est fini. On pose $\mathcal{S} = \{\cdots, s., \cdots\}$ un ensemble fini de tels multi-indices. Pour $s. \in \mathcal{S}$ on construit le complexe strictement parfait $A^\cdot(s.)$ tel que

$$A^\cdot(s.) := \cdots \xrightarrow{0} A^{s_i} \xrightarrow{0} A^{s_{i+1}} \xrightarrow{0} \cdots$$

avec les différentielles 0. Soit $\mathcal{P}^\cdot$ la dg-catégorie dont les objets sont les $A^{s.}$, et on définit ces flèches par

$$\mathcal{P}(A^{s.}, A^{s'_.}) := Hom_A(A^{s.}, A^{s'_.})$$

tel que $Hom_A(A^{s.}, A^{s'_.})$ est le complexe défini pour tout $k$ par

$$Hom_A(A^{s.}, A^{s'_.})^k = \bigoplus_{j-i=k} A^{s_i s'_j}.$$

Les différentielles sont 0 mais la composition est donnée par la multiplication des matrices. La dg-catégorie $\mathcal{P}^\cdot = \mathcal{P}^\cdot_{\mathcal{S},A}$ satisfait aux hypothése 5.2. On obtient un schéma de Grothendieck-Pridham $X$ est donc un $n$-champs géométrique paramétrisant les éléments de Maurer-Cartan de $\mathcal{P}_{\mathcal{S},A}$.

Pour un $k$-algèbre $B$ on a

$$X_0(B) = \mathcal{MC}(\mathcal{P}_{\mathcal{S},A} \otimes B)$$

c'est l'ensemble des couples $((A \otimes B)^{s.}, \delta)$ où $\delta$ est un élément de Maurer-Cartan de

$$\mathcal{P}^1_{\mathcal{S},A}((A \otimes B)^{s.}, (A \otimes B)^{s.}) = \bigoplus_i Hom_A(A^{s_i}, A^{s_{i+1}}) \otimes B.$$

Comme les différentielles de $Hom_A(A^{s.}, A^{s.})$ sont 0, l'équation de Maurer-Cartan pour $\delta$ devient simplement $\delta^2 = 0$. Autrement dit : $((A \otimes B)^{s.}, \delta)$ est un complexe strictement parfait de $(A \otimes B)$-modules.

# Bibliographie


[AGV] M. Artin, A. Grothendieck, and J. L. Verdier, ThÂ´eorie des topos et cohomologie Â´etale des schÂ´emas. Tome 2, Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, vol. 270 (Springer, Berlin, 1972).

[BENZ13] B. BENZEGHLI. Un schéma simplicial de Grothensieck-Pridham. Preprint. http ://arxiv.org/abs/1303.4941.

[BENZ12] B. BENZEGHLI. Géométricité artinienne de l'$\infty$-champs des éléments de Maurer-Cartan. Preprint. http ://arxiv.org/abs/1210.0192.

[BENZ08] B. BENZEGHLI. Les Complexes Parfaits. Mémoire de recherche Master2. 16 SEPT 2008.

[BRUN] W. BRUNS. Divisors on varieties of complexes. Math. Ann. 264 (1983), 53-71.

[BUCH1] D. BUCHSBAUM, D. EISENBUD. What makes a complex exact ? J. Algebra 25 (1973), 259-268.

[BUCH2] D. BUCHSBAUM, D. EISENBUD. Some structure theorems for finite free resolutions. Adv. in Math. 12 (1974), 84-139.

[CALA] J. CALAIS. Eléments de Théorie des Anneaux (Anneaux commutatifs). Ellipses, 2006.

[DUSK] J. Duskin, Higher-dimensional torsors and the cohomology of topoi : the abelian theory, Applications of sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Lecture Notes in Mathematics, vol. 753 (Springer, Berlin, 1979), 255â279. http ://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBFb0061822.pdf

[DWYER1] W. G. DWYER and D. M. KAN. Calculating Simplicial Localizations. Journal of Pure and Applied Algebra. 18(1980) $17-35$.

[DWYER2] W. G. DWYER and D. M. KAN. Simplicial Localizations of Categories. Journal of Pure and Applied Algebra 17(1980) $267-284$.

[DWYER3] W. G. DWYER and D. M. KAN. Fonction Complexes for diagrams of Simplicial Sets.MATHEMATICS, proceeding A 86(2), June 20, 1983.

[DWYER4] W. G. DWYER and D. M. KAN. An obstruction Theory for Diagrams of Simplicial Sets. MATHEMATICS, Proceedings A 87(2), June 18, 1984.

[GETZ] E. Getzler. Lie theory for nilpotent $L_\infty$-algebras. Ann. of Math. 170 (2009), 271-301.

[GLEN] P. G. GLENN, Realization of cohomology classes in arbitrary exact categories, J. Pure Appl. Algebra 25(1) (1982), 33â105.

[GROTH] A. Grothendieck, La Poursuite des Champs.

[GUGE] V.K.A.M. GUGENHEIM, L. LAMBE. Applications of perturbation theory to differential homological algebra I,II. Illinois J. Math. 33 (1989), 556-582 ; 35 (1991), 357-373.

[HART] R. HARTSHORNE. Algebraic geometry. (Graduate Texts in Mathematics 52). Springer-Verlag, $6^{th}$ edition 1993.

[HENR] A. HENRIQUES. Integrating $L_\infty$-algebras. Compos. Math. 144 (2008), 1017-1045. http ://arxiv.org/pdf/math/0603563v2.pdf

[HINI] V. Hinich. Descent of Deligne groupoids. Int. Math. Res. Notices 5 (1997), 223-239.

[HISI] A. HIRSCHOWITZ, C. SIMPSON. Déscente pour les $n$-champs. Preprint arXiv :math/9807049.

[HUNE] C. HUNEKE. The Arithmetic Perfection of Buchsbaum-Eisenbud Varieties and Generic Modules of Projective Dimension Two. Transactions of the American Mathematical Society, 265 (1981), 211-233.

[ILLU] [ILLU] L. Illusie. Complexe cotangent et déformations, I et II. Springer Lecture Notes 239 et 283 (1971-72).

[KEMP] G. KEMPF. Images of homogeneous vector bundles and varieties of complexes. Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 900-901.

[LANG] S. LANG. ALGEBRA. third edition. Addison-Wesley Publishing Company 1993.

[MASS] C. MASSRI. Examples of varieties of structures. Preprint arxiv :1202.5530 (2012).

[PERR] D. PERRIN. GEOMETRIE ALGEBRIQUE (Une introduction). SAVOIRS ACTUELS (CNRS Edition / InterEdition), 1998.

[PRID] J. P. PRIDHAM. Presenting higher stacks as simplicial schemes. Preprint arxiv 0905.4044 (2009).

[PRID2] J. P. PRIDHAM. Notes characterizing higher and derived stacks concretely. Preprint arxiv 1105.4853 (2011).

[SEYM] R. M. SEYMOUR, Kan fibrations in the category of simplicial spaces Fund. Math., 106(2) :141-152, 1980. http ://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm106/fm106115.pdf

[SIMP1] C. SIMPSON. Algebraic (geometric) $n$-stacks. 1996. Preprint. http ://arxiv.org/abs/alg-geom/9609014.

[SIMP2] C. SIMPSON. Geometricity of the Hodge filtration on the $\infty$-stack of perfect complexes over $X_{DR}$. Preprint. http ://arxiv.org/abs/math/0510269v2

[SIMP] C. SIMPSON. Homotopy Theory of Higher categories. from Segal Categories to $n$-categories and Beyond. New Mathematical Monographs :19. Cambridge University Press. ISBN $978-0-521-51695-2$.

[TABU] G. TABUADA. Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 15-19.

[THOM] R. THOMASON, T. TROBAUGH. Higher algebraic $K$-theory of schemes and of derived categories. The Grothendieck Festschrift, Vol. III, 247–435,Progr. Math., 88, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

[TOEN] B. TOEN. Anneaux de Grothendieck des $n$-champs d'Artin. Novembre 2009.

[TOEN1] B. TOEN. The homotopy theory of dg-categories and derived Morira theory. Invent. Math 167. 615-667 (2007).

[TOVE2] B. TOEN, G. VEZZOSI. Homotopical algebraic geometry II : Geometric stacks ans applications, Mem. Amer. Math. Soc. 193(2008), no.902, x+224 pp.

[TOVA] B. TOEN, M. VAQUIE. Moduli of objects in dg-categories. Annales de l'E.N.S., 40 (2007), 387-444.

[TRIV] V. TRIVEDI. The seminormality property of circular complexes. Proc. Indian Acad. Sci. 101 (1991), 227-230.

[LOVA] J-L. LODAY, B. VALLETTE. Algebraic Operads. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Volume 346. Springer-Verlag (2012).

[YOSH] Y. YOSHINO. Some results on the variety of complexes. Nagoya Math. J. 93 (1984), 39-60.

[ZHU] Chenchang ZHU. Kan replacement of simplicial manifolds. Lett. Math. Phys. 90 (2009). No 1-3, 383405. http ://arxiv.org/pdf/0812.4150.pdf